

621.396.67

Ш 64

Я.Д.ШИРМАН

РАДИОВОЛНОВОДЫ
и
ЪЁМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Б 2 3 5 7 8 1 2 5 1 0 3 3

Я. Д. ШИРМАН

РАДИОВОЛНОВОДЫ И ОБЪЁМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ
ПО ВОПРОСАМ СВЯЗИ И РАДИО
МОСКВА 1959

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга подготовлена на основе лекций, которые читались автором в течение ряда лет по курсу теоретических основ радиотехники. Лекционный материал значительно расширен и дополнен.

В первых семи главах книги основное внимание уделяется систематическому изложению теории и описанию физических процессов в волноводах и волноводных резонаторах. Теоретическому анализу предпосылается, как правило, описательный материал, имеется много иллюстраций.

Главы 8 и 9 посвящены теории возбуждения волноводных устройств и неоднородностям в волноводах. При составлении этих глав был избран такой электродинамический метод анализа, который подчёркивает общие черты физических процессов в волноводах и линиях с источниками или неоднородностями, с тем, чтобы использовать эту общность при качественном анализе режимов и при количественных расчётах.

В гл. 10, 11 и 12 кратко излагаются новые вопросы, связанные с распространением электромагнитных волн в замедляющих системах, анизотропных волноводных системах, а также в получающих за последнее время применение полосковых и ребристых волноводах. В качестве анизотропных волноводных систем рассматриваются замедляющие системы с электронными пучками и волноводные системы с ферритами. Поскольку подобные вопросы освещаются пока только в специальной литературе, даже краткое их изложение может оказаться полезным для ряда читателей.

Книга была написана в основном в 1953 г., издана небольшим тиражом в 1954 г., расширена и существенно переработана в 1956 г. Автор признателен ряду товарищей по работе, которые на протяжении этого времени, знакомясь с материалом книги, спо-

способствовали постепенному его улучшению, и, в особенности, кандидату технических наук Черняеву Л. К., а также рецензентам кандидатам технических наук Каценеленбауму Б. З. и Домбровскому И. А., советы и замечания которых были учтены при подготовке рукописи к печати. Автор благодарен ответственному редактору кандидату технических наук Персикову М. В., взявшему на себя труд редактирования, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний. По просьбе автора им заново написана вторая половина § 5.6 и конец § 5.8 по материалам проводимой исследовательской работы. Наконец, автор с благодарностью хотел бы упомянуть о внимании, проявленном к данной работе со стороны ~~без~~^{ПРЕЖДЕ}временного скончавшегося профессора Александра Георгиевича Аренберга.

Замечания по книге следует направлять в Связьиздат (Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2).

Автор

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИАПАЗОНА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ И ЕГО ОСОБЕННОСТИ

К диапазону сверхвысоких частот (свч) в современной радиотехнике относят электромагнитные колебания с частотой выше одного гигагерца ($1 \text{ Ггц} = 1000 \text{ Мгц} = 10^9 \text{ гц}$), т. е. с длиной волны короче 30 см^1). Сверхвысокие частоты соответствуют коротковолновой части диапазона дециметровых волн, сантиметровым и миллиметровым волнам. Все эти волны, в свою очередь, входят в более широкий диапазон ультракоротких волн (укв), т. е. волн, длина которых короче 10 м .

Техника сверхвысоких частот является сравнительно молодой отраслью радиотехники. Весьма большое развитие техника свч получила в годы Великой Отечественной войны в связи с насущными потребностями радиолокации.

Известно, что радиолокация использует явление отражения или вторичного излучения электромагнитных волн, открытое великим русским учёным, изобретателем радио А. С. Поповым. Известно далее, что вторичное излучение достаточно эффективно, если размеры облучаемого объекта соизмеримы (или достаточно велики) по сравнению с длиной волны. Уже одно это потребовало работы радиолокационных станций в диапазоне ультракоротких волн, начиная с метровых.

В годы Великой Отечественной войны наблюдался переход от метровых волн к сантиметровым в значительной части радиолокационной аппаратуры. Основной причиной этого явилось то, что в диапазоне сантиметровых волн *удаётся добиться концентрации электромагнитной энергии в весьма узкие пучки при ограниченных размерах антенн* (рис. 1.1)²). Последнее позволяет усилить кон-

¹) При определении связи между длиной волны в сантиметрах и частотой в гигагерцах удобно пользоваться формулой

$$\lambda_{\text{см}} = \frac{30}{f_{\text{Ггц}}}.$$

²) Для антенн с параболическим рефлектором и некоторых других видов антенн ширина диаграммы направленности в радианах, измеренная по уровню половинной мощности, примерно равна отношению длины волны к линейному размеру антенны (рис. 1.1).

Со стороны длинных волн диапазон свч граничит с метровыми волнами, за которыми следуют короткие промежуточные и длинные волны (рис. 1.2). Со стороны коротких волн диапазон свч граничит с областью инфракрасного излучения.

Согласно электромагнитной теории света, как инфракрасное излучение, так и радиоволны представляют собой электромагнитные колебания. Инфракрасное излучение создаётся

некогерентными колебаниями атомов и молекул и характеризуется хаотичностью фазы и поляризации. Радиотехнические колебания

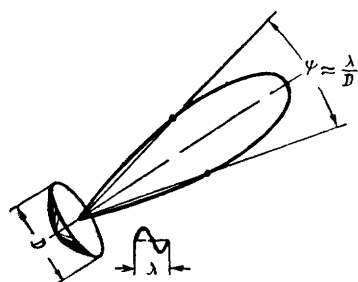


Рис. 1.1. Диаграмма направленности параболической антенны

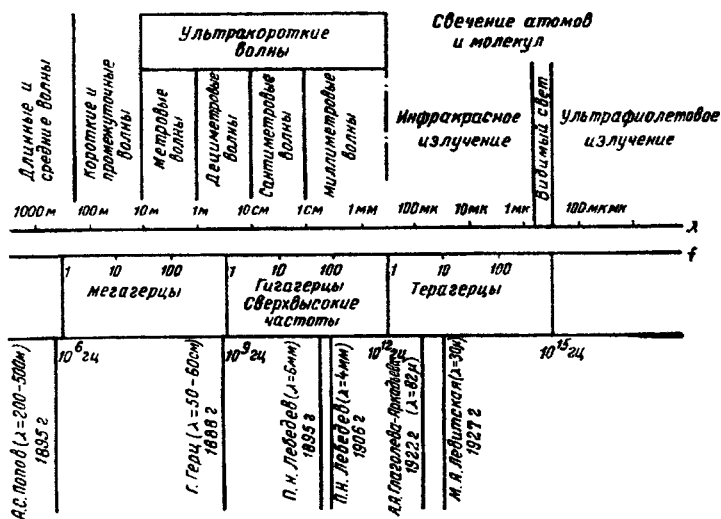


Рис. 1.2. Место диапазона свч в спектре электромагнитных колебаний

возбуждаются в колебательных системах и излучаются специальными антенными устройствами. Они, как правило, характеризуются закономерным изменением фазы и определённой поляризацией волны. Частоты и длины волн инфракрасного излучения и радиоизлучения перекрываются между собой. Современные тепловые методы позволяют наблюдать инфракрасное излучение с длиной волны до 0,5 мм. Что касается радиоволн, то ещё в 1895 г. знаменитый русский физик П. Н. Лебедев получил при помощи разряда миниатюрных вибраторов колебания свч с длиной волны $\lambda = 6$ мм. Им же получены в 1906 г. электромагнитные колебания с длиной волны $\lambda = 4$ мм. Осуществляя идею В. К. Аркадьева, А. А. Глаголева-Аркадьева получила при помощи искрового разряда через металлические опилки, смоченные маслом, интенсивное излучение электромагнитных волн в диапазоне от 50 до 0,082 мм. Этим же методом М. А. Левитская получила колебания с длиной волны $\lambda = 0,03$ мм. В результате перечисленных выше работ было показано, что электромагнитные волны в десятки доли миллиметра могут быть получены двояко: 1) как излучение миниатюрных электрических вибраторов; 2) как инфракрасное излучение, т. е. излучение возбуждённых атомов и молекул. Тем самым было доказано *единство природы инфракрасных лучей и радиоволн*¹⁾.

Как уже указывалось выше, энергию колебаний свч удаётся сконцентрировать в узкие пучки при небольших габаритах излучателей, так же как это можно сделать для инфракрасных и световых колебаний. В то же время *поглощение и рассеяние в атмосфере*, свойственное инфракрасному, а особенно световому излучению, *сказывается и на распространении электромагнитных колебаний свч*. В связи с большими расстояниями, которые обычно проходят радиоволны, затухание волн в атмосфере из-за явлений поглощения и рассеяния может оказаться весьма значительным. Это затухание ещё сравнительно мало в диапазоне дециметровых волн, существенно сказывается в коротковолновой части сантиметрового диапазона и особенно велико в диапазоне миллиметровых волн. Поскольку поглощающие энергию молекулы являются резонансными системами, то и поглощение носит резонансный характер, усиливаясь на одних и ослабевая на других участках спектра частот.

Особенно важное значение с точки зрения практического использования имеют *сантиметровые волны*, которые, позволяя получить *остронаправленное* действие антенн, характеризуются умеренным затуханием. В ряде случаев могут представлять интерес *миллиметровые волны*, которые, отличаясь большим затуханием

¹⁾ Новое подтверждение этого единства было получено недавно при помощи радиоастрономии. В результате наблюдения радиоизлучения межзвёздного пространства установлено наличие спектральных линий некогерентного излучения атомов водорода уже в диапазоне дециметровых волн ($\lambda = 21$ см).

в атмосфере, позволяют получить более высокую направленность антенн.

Длительное время считалось, что ультракороткие волны и в особенности радиоволны свч не пригодны для связи на большие расстояния. Дело в том, что эти волны, приближаясь по свойствам к световым, не способны огибать большие (по сравнению с длиной волны λ) препятствия и распространяются практически в зоне прямой видимости. Сейчас эта трудность преодолевается путём последовательных ретрансляций от одной радиостанции к другой при использовании направленного излучения и приёма. Такая передача называется *радиорелейной* и позволяет осуществить высококачественную телефонную и телеграфную многоканальную радиосвязь, а также обмен телевизионными программами при весьма малой мощности промежуточных радиостанций. Наряду с радиорелейной связью открываются перспективы использования отражений от неоднородностей тропосферы, а также специальных ретрансляторов на искусственных спутниках земли. Современные радиорелейные линии позволяют осуществить по одному направлению до 1200 телефонных связей.

Передача такого большого числа каналов связана с использованием весьма широких спектров частот. Известно, что для устранения искажений несущая частота должна существенно превышать ширину передаваемого спектра, так как в противном случае условия передачи отдельных спектральных составляющих будут различными. Это условие, не выполнимое в диапазоне длинных волн, особенно легко выполняется на дециметровых и сантиметровых волнах. Таким образом, *кроме возможности концентрации электромагнитного излучения, достоинство диапазона свч состоит в возможности неискажённой передачи весьма широких спектров частот по каждому радиоканалу.* В радиолокации это позволяет излучать весьма короткие радиоимпульсы, характеризуемые широким спектром с тем, чтобы обеспечить раздельный приём отражённых сигналов от близко расположенных объектов, т. е. добиться высокой разрешающей способности по дальности.

По характеру используемой аппаратуры диапазон свч является *радиотехническим*. Здесь широко применяются колебательные системы, электронные генераторы, линии передачи электромагнитной энергии, как и на более низких частотах. Однако при переходе от высоких к сверхвысоким частотам дело не ограничивается простым количественным изменением параметров всех этих устройств. В большинстве случаев эти устройства изменяются коренным образом *качественно*, что и приводит к необходимости специального изучения радиотехники сверхвысоких частот.

§ 1.2. ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА СВЧ

На рис. 1.3а представлен одиночный колебательный контур, состоящий из сосредоточенных ёмкости C и индуктивности L .

На рис. 1.3з, и, к показан переход от колебательного контура (рис. 1.3б) к *полым электромагнитным системам*, которые отличаются ещё более высокой добротностью и наиболее пригодны для работы в диапазоне сантиметровых волн.

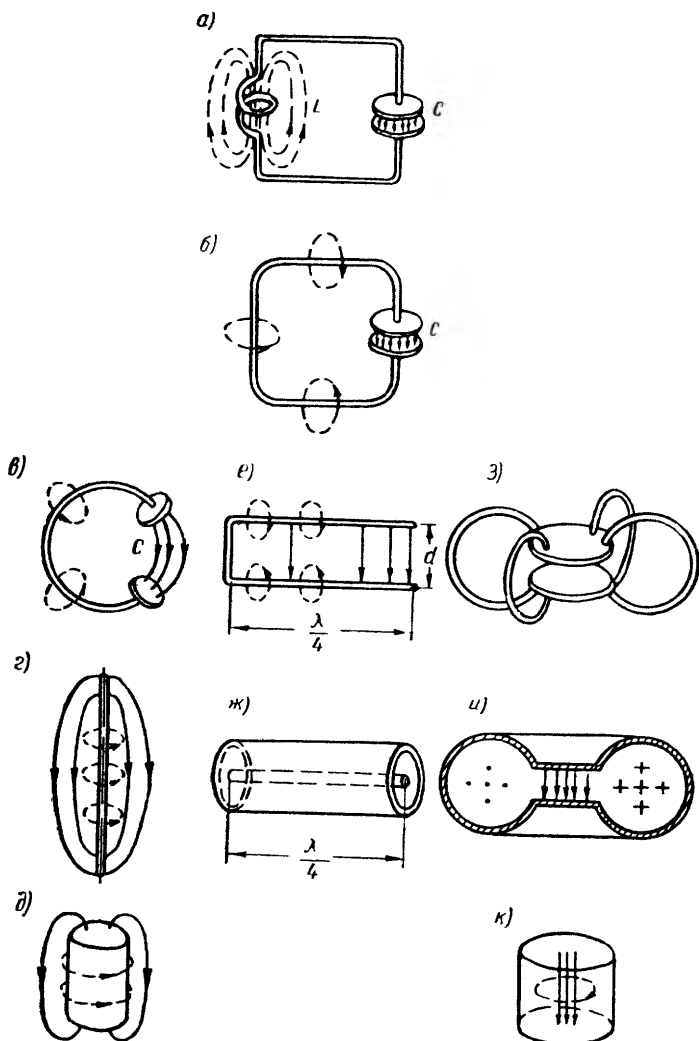


Рис. 1.3. Переход от колебательного контура с сосредоточенными постоянными к электромагнитным резонаторам

Известно, что повышение собственной частоты контура (рис. 1.3б) может быть достигнуто путём уменьшения его индуктивности. С этой целью используется параллельное соедине-

При уменьшении геометрических размеров всех элементов контура в какое-либо число n раз, в такое же число раз возрастает его собственная частота. Однако при уменьшении размеров контура резко возрастает роль паразитных параметров цепи, подключённой к контуру, и уменьшается энергия, которую можно запасти в конденсаторе контура без опасности электрического пробоя. Поэтому при переходе к свч подобный путь повышения собственной частоты контура оказывается неприемлемым.

Собственную частоту колебательного контура можно повысить, не уменьшая размеров колебательной системы. Для этого достаточно, не меняя ёмкости контура C , уменьшить индуктивность L до индуктивности витка (рис. 1.3б). Дальнейшее повышение собственной частоты контура достигается путём уменьшения ёмкости за счёт увеличения расстояния между пластинами конденсатора и сокращения площади пластин (рис. 1.3в).

Видоизменениями колебательного контура (рис. 1.3в) являются *цилиндрические вибраторы* (рис. 1.3г, д). На рис. 1.3г представлен тонкий цилиндрический вибратор, для которого поперечные размеры много меньше длины вибратора, а на рис. 1.3д — толстый вибратор, продольные и поперечные размеры которого соизмеримы между собой. Подобные вибраторы впервые использовались для генерации затухающих электромагнитных колебаний искровым методом. Поскольку вибраторы (рис. 1.3г, д) представляют собой открытые колебательные системы (колебательные системы с внешним полем), то в режиме колебаний они излучают энергию и, следовательно, обладают низкой добротностью, поэтому в настоящее время вибраторы используются лишь как элементы антенных устройств.

Примером системы, обладающей несколько меньшими потерями на излучение, является колебательный контур (рис. 1.3е) в виде *резонансного отрезка двухпроводной линии*, который можно рассматривать как результат деформации колебательного контура (рис. 1.3в). Потери на излучение здесь будут тем меньше, чем меньше расстояние между проводами по сравнению с длиной волны. Такие системы иногда используются в диапазоне дециметровых волн, но обычно мало пригодны для сантиметрового диапазона вследствие больших потерь на излучение и тепловых потерь.

У *резонансного отрезка коаксиальной линии* (рис. 1.3ж) потери на излучение оказываются значительно меньше, поскольку электромагнитное поле концентрируется внутри замкнутого объёма. Здесь остаются только тепловые потери, обусловленные протеканием тока по поверхности металлических проводов, но и они уменьшены, так как поверхность внешнего проводника больше, чем у отрезка двухпроводной линии. Поэтому отрезок коаксиальной линии представляет собой колебательную систему с более высокой добротностью и широко используется на границе дециметрового и сантиметрового диапазонов.

ние индуктивных витков (рис. 1.3з). При увеличении числа витков можно в пределе перейти к *тороидальному* полюму электромагнитному резонатору (рис. 1.3и). Электромагнитное поле последнего заключено внутри замкнутой металлической поверхности, поэтому потери на излучение в таком резонаторе отсутствуют. Тепловые потери сравнительно невелики, поскольку поверхность, по которой распределяется ток, значительно больше, чем поверхность внутреннего провода коаксиального резонатора. Связь с полостью колебательной системой не вызывает затруднений и легко достигается при помощи витков, вводимых в резонатор. Впервые тороидальный резонатор был предложен советским учёным М. С. Нейманом в 1938 г.

Деформируя тороидальный резонатор, можно прийти к другим видам полых колебательных систем, например к *полости цилиндрического резонатора* (рис. 1.3к), который в отличие от цилиндрического резонатора (рис. 1.3д) является резонатором с *внутренним* полем или *полым* электромагнитным резонатором¹⁾. Полые электромагнитные резонаторы обладают *весьма высокой добротностью* от сотен до сотен тысяч. В настоящее время они играют преобладающую роль в радиотехнике свч по сравнению с другими видами колебательных систем.

Как и резонаторы с внешним полем (рис. 1.3г), полые электромагнитные резонаторы представляют собой *качественное* видоизменение колебательного контура с сосредоточенными параметрами (рис. 1.3а), связанное с переходом в диапазон свч.

§ 1.3. ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДВУХПРОВОДНЫХ И КООКСИАЛЬНЫХ ФИДЕРНЫХ ЛИНИЙ НА СВЧ

Существенные изменения при переходе в диапазон свч наблюдаются также в линиях передачи электромагнитной энергии, называемых часто фидерными линиями. В ряде случаев от двухпроводных и коаксиальных линий, которые с успехом используются на более низких частотах, пришлось отказаться и перейти к передаче электромагнитной энергии по полым металлическим трубам (волноводам).

Как известно, передача энергии высокой частоты вдоль линии является вообще более сложной задачей, чем передача энергии промышленной частоты или постоянного тока. Последнее связано с тем, что при длине линии, соизмеримой с длиной волны λ , распределённые вдоль линии реактивные параметры оказывают большое влияние на режим работы всего высокочастотного тракта. Одним из основных требований, предъявляемых к обычной длинной линии, является поэтому требование *однородности* её

¹⁾ Более кратко полые электромагнитные резонаторы называют *объёмными резонаторами*

параметров. Этому требованию удовлетворяют, в частности, двухпроводные и коаксиальные фидерные линии.

Двухпроводные линии, достоинствами которых являются удобство соединения с симметричной нагрузкой и конструктивная простота, широко используются главным образом на длинных, коротких, а в ряде случаев и на метровых волнах.

Однако в диапазоне дециметровых волн от двухпроводных линий отказываются и переходят к коаксиальным ¹⁾. Основная причина перехода состоит в том, что электромагнитное поле простой двухпроводной линии (рис. 1.4а) не экранировано, и по мере того, как длина волны становится соизмеримой с расстоянием между проводниками, резко возрастают *потери на излучение*. С повышением частоты растут также потери в проводниках линии, в опорных изоляторах, усиливается опасность появления нежелательных обратных связей.

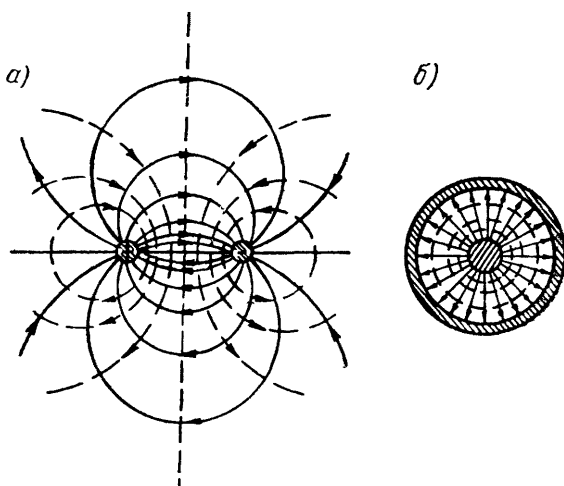


Рис. 1.4. Структура поля в поперечном сечении:
а) для двухпроводной линии; б) для коаксиальной линии

В дециметровом диапазоне наиболее часто используются *коаксиальные* (концентрические) фидерные линии, электромагнитное поле которых сконцентрировано в зазоре между проводниками (рис. 1.4б). В результате полностью устраняются паразитные связи и потери на излучение. Существенно уменьшаются также тепловые потери во внешнем проводнике, имеющем большую внутреннюю поверхность.

Коаксиальный фидер, однако, сравнительно сложен в конструктивном отношении. Положение внутреннего проводника долж-

¹⁾ Мы здесь не останавливаемся на новейших конструкциях полосковых (ленточных) линий, о которых речь будет идти в дальнейшем.

но быть *строго фиксировано*. В противном случае не будет выполнено основное требование однородности параметров, что приведёт к местным отражениям волн в фидере.

С этой целью зазор между проводами может быть заполнен диэлектриком. Но диэлектрические потери при переходе к сантиметровым волнам даже при использовании лучших диэлектриков, например полиэтилена, весьма велики. Поэтому сплошной диэлектрик заменяется диэлектрическими шайбами или бусинками. Хотя влияние волн, отражённых от этих неоднородностей, можно ослабить за счёт их взаимной компенсации¹⁾, потери в диэлектрике всё же остаются значительными.

Полное устранение потерь в диэлектрике достигается путём замены диэлектрических шайб четвертьволновыми металлическими изоляторами (рис. 1.5), которые фиксируют положение внутреннего проводника, не внося существенных потерь и не нарушая работы линии. Четвертьволновый отрезок линии обладает на своей резонансной частоте большим входным сопротивлением, намного превышающим волновое сопротивление линии. Можно считать, что и в некотором диапазоне частот вблизи от резонансной металлический изолятор также не вызывает существенных отражений. Изолятор, представленный на рис. 1.5, нормально работает в диапазоне частот $\pm 1,5\%$ от резонансной частоты. Применяя специальную «широкополосную» конструкцию металлического изолятора, можно обеспечить нормальную работу в диапазоне частот $\pm 15\%$, т. е. в значительно более широком, но всё же ограниченном диапазоне частот.

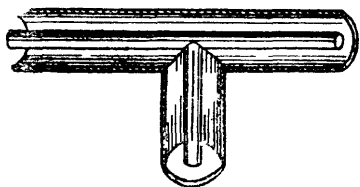


Рис. 1.5. Четвертьволновый металлический изолятор для коаксиальной линии

Основным недостатком коаксиального кабеля, затрудняющим его использование на сантиметровых волнах, является *ограничение в величине передаваемой мощности*, допустимой с точки зрения электрического пробоя диэлектрика, заполняющего кабель (для коаксиальных линий с металлическими изоляторами диэлектриком служит воздух). Многие современные радиолокационные станции рассчитаны на большие мощности, измеряемые сотнями киловатт и мегаваттами в импульсе. Электрический пробой представляет при этом реальную опасность. Пробой начинается там, где напряжённость электрического поля достигает предельного значения $E_{пред}$. Для воздуха при нормальном давлении $E_{пред} \approx 30 \text{ кВ/см}$. Как видно из рис. 1.4б, наиболее опасной с точки

¹⁾ Если шайбы расположены через четверть волны, ёмкость одной из шайб трансформируется четвертьволновым отрезком в индуктивность и частично компенсирует ёмкость предыдущей шайбы. Чтобы работа фидера была менее критичной к изменениям частоты, число шайб увеличивают до десятка и более на длину волны.

зрения пробоя является окрестность внутреннего проводника коаксиального кабеля.

Казалось бы, решением вопроса о величине передаваемой мощности является пропорциональное увеличение поперечных размеров кабеля. Однако этот путь не приемлем для диапазона сантиметровых волн. *Только в том случае, когда поперечные размеры коаксиального кабеля достаточно малы по сравнению с длиной волны* и процессы в кабеле ещё правильно описываются теорией длинных линий (это будет пояснено более подробно в дальнейшем), возможна нормальная работа кабеля как *фидерного устройства*. В связи с этим уменьшение рабочей длины волны λ должно сопровождаться *сокращением размеров поперечного сечения* коаксиального кабеля.

При заданной предельной напряжённости поля (а значит, и предельной плотности потока энергии) величина предельной мощности пропорциональна площади поперечного сечения. Поэтому, если размеры кабеля уменьшаются пропорционально длине волны λ , то площадь поперечного сечения, а значит, и величина предельной мощности уменьшаются пропорционально квадрату длины волны.

Существенным недостатком коаксиального кабеля, с точки зрения его использования в диапазоне сантиметровых волн, являются *сравнительно большие потери в стенках*, которые увеличиваются с укорочением длины волны. Погонное активное сопротивление кабеля, характеризующее эти потери, рассчитывается как сумма сопротивлений внутреннего и внешнего проводников на единицу длины

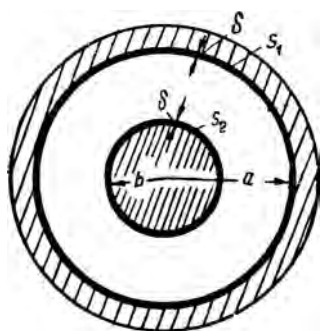


Рис. 1.6. Эквивалентные площади поверхностного слоя в поперечном сечении кабеля

$$R_1 = \frac{1}{\sigma S_1} + \frac{1}{\sigma S_2}, \quad (1.1)$$

где σ — проводимость металла, а S_1 и S_2 — эквивалентные площади поверхностного слоя в поперечном сечении кабеля (жирные линии на рис. 1.6).

Эти площади определяются через глубину проникновения тока δ и радиусы проводников a и b :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2\pi a \delta \\ S_2 &= 2\pi b \delta \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Первое слагаемое в ф-ле (1.1) характеризует потери во внешнем, а второе — во внутреннем проводниках. Основная часть потерь относится к *внутреннему проводнику* радиуса b , ток которого растекается по меньшей поверхности. Поскольку глубина про-

никновения пропорциональна $\sqrt{\lambda}$, то для произвольного коаксиального кабеля с фиксированными размерами поперечного сечения погонное сопротивление R_1 возрастает с уменьшением длины волны обратно пропорционально длине волны в степени $1/2$. Если же, по указанной выше причине, одновременно с уменьшением длины волны приходится пропорционально сокращать каждый из линейных размеров поперечного сечения a и b , сопротивление изменяется обратно пропорционально длине волны в степени $3/2$.

Недостатки коаксиального кабеля, существенные при использовании его на волнах короче 10 см, — малая предельная мощность, большое затухание за счёт потерь в стенках, осложнения при фиксации внутреннего проводника — связаны с наличием этого проводника, концентрирующего электрическое поле, что увеличивает опасность пробоя. Концентрация тока на поверхности этого проводника приводит к увеличению потерь. Усложнение конструкции и сужение рабочего диапазона частот при наличии металлических изоляторов также вызываются наличием внутреннего проводника.

Возникает вопрос об удалении этого проводника, т. е. о переходе от коаксиального кабеля к полой металлической трубе — волноводу.

§ 1.4. ПОЯСНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДЕЙСТВИЯ ВОЛНОВОДА В ВИДЕ ПОЛОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ТРУБЫ. СРАВНЕНИЕ С КОАКСИАЛЬНЫМ КАБЕЛЕМ.

Теория и опыт показывают, что передача электромагнитной энергии внутри полой металлической трубы на достаточно большие расстояния осуществима, *если размеры поперечного сечения будут соизмеримы (или достаточно велики) по сравнению с длиной волны*. Не претендуя на строгость рассуждений, убедимся, что такое заключение не противоречит современным представлениям о передаче электромагнитной энергии и о работе длинных линий.

Как известно, энергия передаётся не по проводам длинной линии, а в пространстве между ними. Металлические элементы служат лишь для создания направляемого потока электромагнитной энергии. Распространение энергии может отличаться от прямолинейного, если провода плавно меняют своё направление, не вызывая отражения распространяющихся волн. Плотность потока энергии определяется вектором Умова — Пойнтинга, т. е. векторным произведением векторов напряжённости электрического и магнитного полей.

То же относится и к передаче энергии внутри полой металлической трубы. При определённых условиях труба направляет распространение потока энергии, который не может выйти за пределы её проводящих стенок. Это значит, что существует составляю-

щая вектора плотности потока энергии вдоль направления распространения. На основании теоремы Умова — Пойнтинга можно сделать важный вывод: волна, распространяющаяся по волноводу, обязательно должна содержать *поперечные* составляющие векторов электрического и магнитного полей.

Если исключить из рассмотрения возможность существования замкнутых на себя линий электрического поля, то последние должны начинаться и кончаться на проводящей поверхности трубы. Примеры простейших распределений электрического поля для круглой и прямоугольной труб показаны на рис. 1.7а и б. Поскольку проводимость стенок обычно можно считать близкой к идеальной, линии электрического поля идут нормально поверхности стенок. На стенках при этом должны накапливаться заряды: положительные там, откуда линии электрического поля выхо-

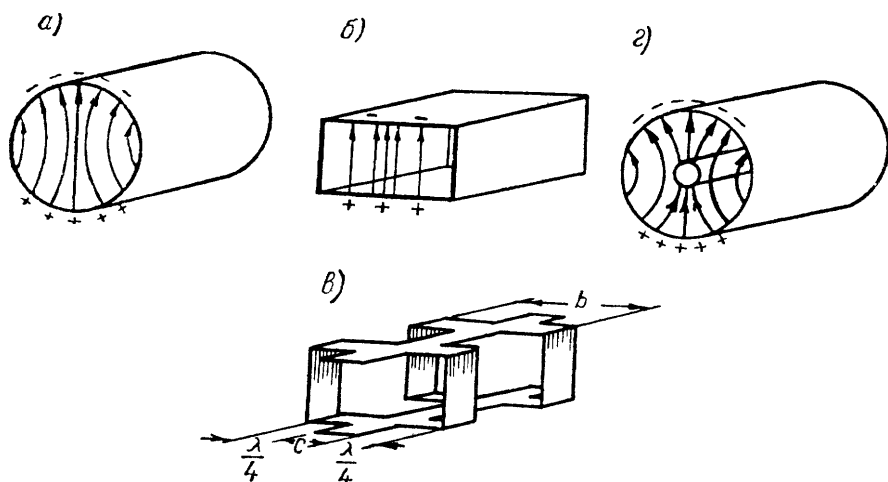


Рис. 1.7. Простейшие волноводные поля и их связь с полями длинной линии с включёнными в неё металлическими изоляторами

дят, отрицательные там, куда эти линии входят. Устойчивое распределение зарядов, показанное на рис. 1.7а и б, невозможно на больших расстояниях от источника энергии, если проводящая поверхность, замыкающая разноимённые заряды, не играет роли *металлического изолятора*.

Чтобы сказанное выше сделать более наглядным, рассмотрим ленточную двухпроводную линию с металлическими изоляторами, присоединёнными с двух сторон (рис. 1.7в). Включение не связанных между собой металлических изоляторов не препятствует, как известно, передаче энергии вдоль линии. По мере увеличения числа включаемых металлических изоляторов мы постепенно переходим к случаю прямоугольной трубы (рис. 1.7б). Хотя распределение поля должно несколько меняться из-за взаимных связей между включаемыми изоляторами, нет оснований ожидать суще-

ственных нарушений в передаче электромагнитной энергии.

В зависимости от ширины c исходной ленточной линии при заданной длине волны λ можно прийти к трубам различной ширины $b = c + 2 \frac{\lambda}{4}$. При этом ширина трубы b всегда превосходит некоторое минимальное значение, равное половине длины волны генератора,

$$b > \frac{\lambda}{2}. \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) определяет минимальный размер волновода b при заданной длине волны генератора λ . Наоборот, если задан размер b прямоугольной трубы, то длины волн генерируемых колебаний, для которых возможна передача энергии волной со структурой поля (рис. 1.7б), ограничиваются неравенством

$$\lambda < 2b. \quad (1.4)$$

Итак, мы убеждаемся, что *передача электромагнитной энергии внутри полой металлической трубы оказывается возможной только на волнах, достаточно коротких по отношению к размерам трубы.*

Качественно сделанные выводы распространяются и на коаксиальный кабель в случае распространения по нему волн (рис. 1.7г), характеризующихся наличием разноимённых зарядов в поперечном сечении на каждой из коаксиальных поверхностей. Условием распространения по кабелю волны является соизмеримость поперечных размеров кабеля с длиной волны λ , когда каждая из проводящих поверхностей начинает играть роль металлического изолятора. Возможность распространения по кабелю подобных видов волн заставляет уменьшать его поперечные размеры, затрудняя использование коаксиального кабеля на сантиметровых волнах.

Из всего сказанного ранее можно заключить, что явление, которое послужило препятствием для работы коаксиального кабеля в диапазоне сантиметровых волн, оказалось возможным применить и использовать для передачи электромагнитной энергии внутри полых металлических труб — *волноводов*. Волноводы прямоугольного и круглого сечений (особенно прямоугольного) являются в настоящее время *основным видом фидерных линий на волнах короче 10 см*. Благодаря более равномерному распределению поля и возможности использовать несколько увеличенную площадь поперечного сечения, волноводы позволяют передавать большую мощность при той же длине волны. Вследствие меньшей концентрации токов по поверхности стенок они обеспечивают передачу энергии с меньшими потерями.

Для иллюстрации сопоставим теоретические значения предельной мощности $P_{пред}$ определяющей начало электрического

пробоя, и постоянной затухания β , характеризующей потери в стенках, для коаксиального кабеля и двух волноводов, рассчитанных на работу в трёхсантиметровом диапазоне. Значения $P_{пред}$ и β представлены в виде диаграммы (рис. 1.8).

Как видно из диаграммы, волноводы позволяют передавать значительно большую мощность и обладают меньшим затуханием, чем коаксиальный кабель, что на достаточно коротких волнах весьма существенно¹⁾. При этом волновод значительно проще, чем коаксиальный кабель с металлическими изоляторами и принципиально представляет собой более диапазонную систему, поскольку не содержит резонансных отрезков.

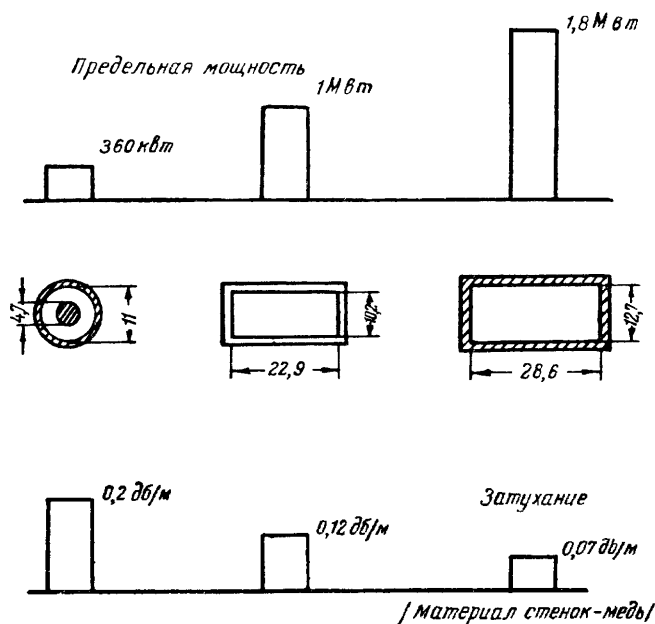


Рис. 1.8. Сравнение предельной мощности и постоянной затухания для типовых конструкций коаксиального кабеля и волноводов ($\lambda = 3$ см)

Причина, по которой волноводы не используются в диапазоне более длинных волн, понятна из принципа их действия. Поскольку размер волновода должен быть достаточно велик по сравне-

¹⁾ Допустимая мощность (с учётом отражений от неоднородностей и нагрузки, а также необходимого запаса электрической прочности) ещё ниже предельной и при использовании металлических изоляторов для коаксиального кабеля (рис. 1.8) составляет всего 50 кВт. Замена металлических изоляторов на диэлектрические шайбы снизила бы допустимую мощность ещё в 3÷5 раз.

нию с длиной волны, применение волноводов в дециметровом диапазоне оказывается нецелесообразным.

Представленные на рис. 1.7 конфигурации полей в волноводах не являются единственными. Так, наряду с рассмотренной конфигурацией поля (рис. 1.9а) в круглом волноводе, возможна конфигурация поля, изображённая на рис. 1.9б, а также бесчисленное множество других конфигураций.

Наряду с полями, в которых линии электрического поля полностью располагаются в поперечном сечении волновода (как это показано на рисунках), возможны и такие поля, в которых вектор электрического поля имеет составляющую вдоль оси волновода).

Чем сложнее поле, тем короче длина волны, начиная с которой возможно распространение. Например, для поля (рис. 1.9б) распространение начинается при более короткой длине волны λ генератора, чем для поля (рис. 1.9а), поскольку отрезок металлической поверхности между разноимёнными зарядами имеет меньшую длину. Рабочую длину волны генератора для заданного волновода выбирают обычно так, чтобы на этой длине волны по волноводу распространялся только один тип колебаний, например, тип колебаний, показанный на рис. 1.9а, и не распространялся тип колебаний, показанный на рис. 1.9б.

Математическое доказательство возможности передачи электромагнитной энергии по полым металлическим трубам относится ещё к 90-м годам прошлого столетия и было дано известным английским физиком Рэлеем. Первые предложения по практическому использованию волноводов относятся к 30-м годам и были сделаны американским учёным Саусвортом. В период второй мировой войны США имели возможность привлечь к работам по развитию волноводной техники в порядке военных заказов многочисленные компании.

В Советском Союзе серьёзные экспериментальные исследования ещё до Великой Отечественной войны провёл безвременно погибший в боях с фашистскими оккупантами молодой учёный Е. М. Студенков. Особенно большой вклад в теорию волноводов внесли фундаментальные работы советских учёных Г. В. Кисунько и Я. Н. Фельда. Ценные работы были проведены С. М. Рытовым, А. Л. Драбкиным, И. И. Вольманом, Л. А. Вайнштейном. Советскими учёными Б. А. Введенским и А. Г. Аренбергом, а также Г. В. Кисунько составлены монографии по волноводной технике, сыгравшие свою положительную роль в деле её развития. Ряд крупных коллективов советских инженеров и учёных в после-

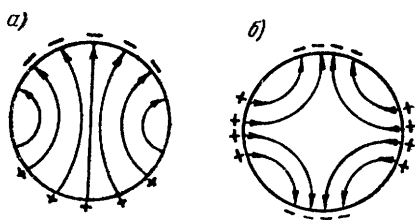


Рис. 1.9. Примеры полей в круглом волноводе

военный период успешно развивает технику сверхвысоких частот и, в частности, волноводную технику.

§ 1.5. ПРИМЕРЫ ВОЛНОВОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

С целью дать более полные предварительные сведения о работе волноводов рассмотрим некоторые примеры волноводных конструкций.

Простейшим методом возбуждения колебаний в волноводе является возбуждение при помощи *штыревой антенны*. Такая антенна обычно служит продолжением внутреннего провода коаксиального кабеля (рис. 1.10а). Со стороны, противоположной на-

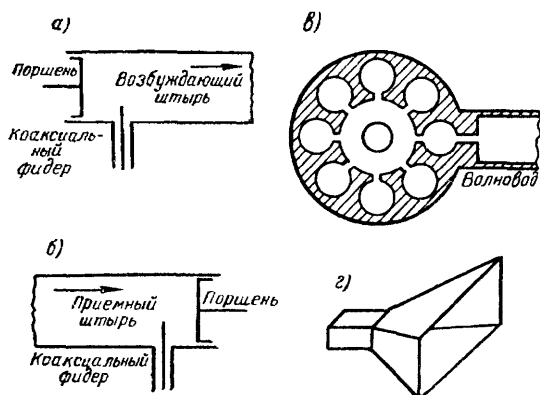


Рис. 1.10. Примеры волноводных конструкций

правлению передачи энергии, волновод закрывается *металлическим поршнем*, отражающим падающую на него волну. Подобное же устройство может быть использовано для вывода энергии из волновода в коаксиальный фидер (рис. 1.10б).

В генераторах свч часто избегают коаксиального участка, питая волновод непосредственно от магнетронного генератора через специальную *щель* (рис. 1.10в). Для вывода энергии из волновода используются также различного рода отверстия, связывающие волновод с объёмной колебательной системой или со свободным пространством, в частности, расширение конца волновода в виде *рупора* (рис. 1.10г), *щели* в стенках или даже просто *открытый конец волновода*. Поскольку при излучении большую роль играет явление дифракции на выходе из отверстия, описанные методы излучения из волновода называются *дифракционными*.

На рис. 1.11 показана простейшая схема волноводного тракта радиолокационной станции с использованием одной антенны для передачи и для приёма. Переключение антенны с приёма на передачу при посылке радиоимпульса производится автоматически,

например, при помощи быстродействующего *антенного переключателя*, основанного на использовании явления газового разряда. Волноводы используются здесь для соединения магнетронного передатчика с антенным переключателем, антенного переключателя с антенной и с кристаллическим смесителем приёмника.

Поскольку антенна станции обычно вращается по азимуту, передача энергии из неподвижного волновода на вращающуюся антенну производится через специальное *вращающееся сочленение*. Вращающееся сочленение обычно выполняется в виде двух отрезков круглого волновода (рис. 1.11), из которых один принадлежит к неподвижной, а другой — к вращающейся части.

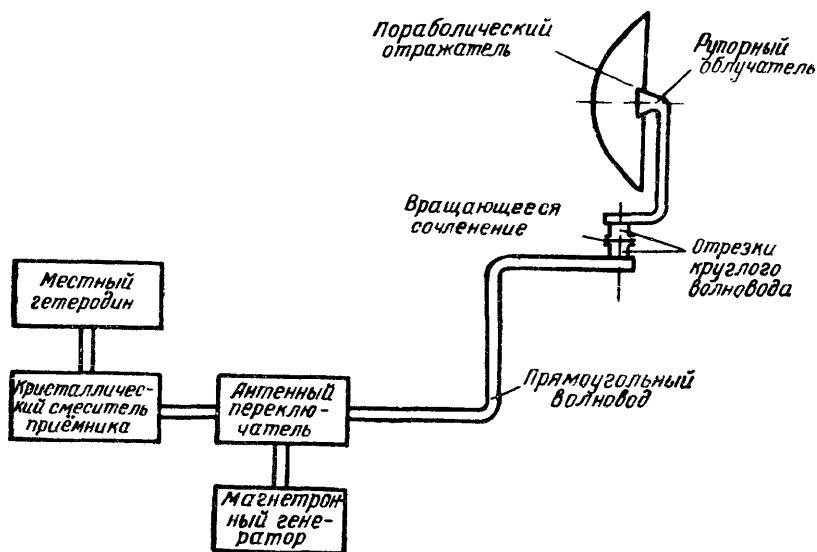


Рис. 1.11. Простейшая схема волноводного тракта

Наряду с использованием в качестве фидерных линий, *волноводы являются неотъемлемыми элементами передающих, приёмных и антенных устройств сантиметрового диапазона.*

§1.6. ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ И ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Основные качественные отличия элементов радиотехнических устройств свч от элементов радиотехнических устройств на более низких частотах связаны:

1) с использованием полых электромагнитных систем в качестве линий передачи энергии и колебательных контуров;

2) с использованием эффекта инерции электронов и колебательных процессов в полых электромагнитных системах для целей генерации и усиления колебаний свч.

Изучение теории полых электромагнитных систем, т. е. волноводов и объёмных резонаторов, является базой для понимания всех основных вопросов радиотехники свч.

При анализе полых электромагнитных систем основное место занимает не изучение напряжений и токов, как в цепях с сосредоточенными параметрами или в цепях, состоящих из отрезков длинных линий, а изучение электромагнитных полей. Только полное представление о характере полей в различных точках объёмной системы может составить достаточно ясную картину её работы. Математическим аппаратом для изучения полых электромагнитных систем являются поэтому не уравнения электрических цепей, а *дифференциальные уравнения электромагнитного поля* (уравнения Максвелла).

Нужно, однако, иметь в виду, что при своей сравнительной сложности электродинамическое рассмотрение приводит в ряде случаев к довольно простым соотношениям, сходным по своему характеру с некоторыми соотношениями в теории цепей и длинных линий. Во всех таких случаях целесообразно выявить общие черты рассматриваемых явлений, поскольку это помогает лучше понять сами явления и облегчает использование теории в практических приложениях.

Изучение полых электромагнитных систем может быть начато как с рассмотрения волноводов, так и с рассмотрения полых электромагнитных резонаторов. В данной книге вначале рассматриваются радиоволноводы, а из резонаторов основное внимание уделяется *волноводным резонаторам*, которые можно рассматривать как отрезки волноводов, замкнутые поперечными проводящими пластинами.

Как уже отмечалось выше, при изучении радиоволноводов мы встречаемся с новым физическим явлением — явлением распространения радиоволн, направляемых вдоль проводящих поверхностей, соизмеримых по своим поперечным размерам с длиной волны. В гл. 2 рассматривается простейший пример направляющей системы, состоящей из двух *идеально проводящих плоскостей*.

ГЛАВА 2

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

§ 2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в идеальном диэлектрике между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями (рис. 2.1) с тем, чтобы выяснить основные закономерности распространения электромагнитных волн вдоль проводящих поверхностей, используя наиболее простой математический аппарат.

В зависимости от метода возбуждения колебаний возможно бесчисленное множество решений уравнений электромагнитного поля, характеризующих поле в диэлектрической среде между проводящими плоскостями. Имея в виду изучение направленной передачи энергии, ограничимся рассмотрением решений в виде волн, распространяющихся вдоль оси z :

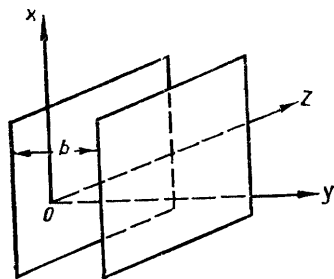


Рис. 2.1. Параллельные плоскости

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}'(x, y) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}'(x, y) e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что такие волны создаются источником энергии высокой частоты ω , который находится вне области изучаемого поля. Множители $e^{i\omega t}$ описывают при этом гармоническое изменение поля во времени с частотой ω , свойственное стационарному режиму вынужденных гармонических колебаний. Постоянная γ характеризует закон изменения поля волны в направлении распространения; как и в теории длинных линий, она назы-

вается *постоянной* распространения и имеет в общем случае мнимую и реальную части

$$\gamma = i\alpha + \beta, \quad (2.3)$$

где α и β — вещественные числа.

Постоянная α характеризует при этом закон изменения фазы колебаний в направлении распространения волны и называется *фазовой постоянной*. Постоянная β характеризует закон убывания амплитуды колебаний и, как указывалось ранее, называется *постоянной затухания*.

Каждое из векторных соотношений (2.1) и (2.2) эквивалентно трём скалярным для составляющих поля по осям координат x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= E'_x(x, y) e^{i\omega t - \gamma z} \\ E_y(x, y, z, t) &= E'_y(x, y) e^{i\omega t - \gamma z} \\ E_z(x, y, z, t) &= E'_z(x, y) e^{i\omega t - \gamma z} \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x(x, y, z, t) &= H'_x(x, y) e^{i\omega t - \gamma z} \\ \vdots \\ \vdots \end{aligned} \right\}. \quad (2.5)$$

Скалярные функции $E'_x(x, y), H'_x(x, y)$ и т. д. представляют собой составляющие векторов $\mathbf{E}'(x, y)$ и $\mathbf{H}'(x, y)$ по осям координат. Индексы x, y и z характеризуют при этом ось, вдоль которой берётся проекция вектора, а обозначения, стоящие в скобках, — соответствующую функциональную зависимость. Например, выражение $E'_z(x, y)$ характеризует зависимость проекции вектора $\mathbf{E}'$ на ось z от координат x и y .

Поскольку каждая из функций $E'_x(x, y)$, $H'_x(x, y)$. . . определяет закон распределения интенсивности соответствующей составляющей поля в плоскости поперечного сечения xoy , она может быть названа *функцией распределения* этой составляющей.

Функция распределения выражается в общем случае комплексным числом и характеризует поэтому не только амплитуду, но и фазу колебаний. Её нельзя назвать, однако, комплексной амплитудой в обычном понимании этого слова. Дело в том, что функция распределения представляет собой коэффициент при волновом множителе $e^{i\omega t - \gamma z}$, в то время как комплексная амплитуда определяется как коэффициент при одном только временном множителе $e^{i\omega t}$. В отличие от комплексных амплитуд, функции распределения обозначены поэтому не точками, а штрихами. Такое же обозначение использовано для векторных функций $\mathbf{E}'(x, y)$ и $\mathbf{H}'(x, y)$, входящих в соотношения (2.1) и (2.2).

Нашей ближайшей задачей является определение простейших решений вида (2.1) и (2.2), удовлетворяющих уравнениям электромагнитного поля и граничным условиям на идеально проводящих плоскостях. Найти решения — это значит: 1) определить вид функций распределения поля в плоскости поперечного сечения, 2) найти значение постоянной распространения γ , характеризующей распределение поля в направлении распространения.

Поскольку граничные условия вдоль оси x не меняются, имеется возможность ограничиться рассмотрением простейшего случая, когда искомое поле *однородно* вдоль оси x . Соотношения (2.1) и (2.2) при этом переписываются в виде:

$$\mathbf{E}(y, z, t) = \mathbf{E}'(y) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{H}(y, z, t) = \mathbf{H}'(y) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (2.7)$$

а функции распределения становятся *функциями одной переменной*.

Можно сказать, что задача о распределении поля приводится к *одномерной*. Ввиду того что при этом значительно упрощаются все математические выкладки, решение одномерной задачи наиболее пригодно для того, чтобы пояснить основные закономерности изучаемых явлений и подробно проанализировать их с различных точек зрения. Решение одномерной задачи имеет также и самостоятельный интерес. К системам параллельных плоскостей с однородным по одной координате полем сводятся некоторые из используемых в технике свч устройств (линзы, облучатели отдельных видов антенн и т. д.), в прямоугольном волноводе (рис. 1.76) электромагнитное поле большей частью бывает однородным вдоль одной из координат.

§ 2.2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Искомые решения должны удовлетворять однородным дифференциальным уравнениям электромагнитного поля (уравнениям Максвелла) для диэлектрической среды между проводящими плоскостями:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Уравнения написаны в предположении, что сторонние токи отсутствуют, проводимость среды равна нулю и что среда является *изотропной* (диэлектрическая и магнитная проницаемости ϵ и μ не зависят от поляризации поля) и *однородной* (проницаемости ϵ и μ не зависят от координат). При написании ур-ний (2.8) и (2.9), как и во всём дальнейшем изложении, использована рационализированная система единиц МКСА.

После перехода к проекциям на оси прямоугольной системы координат система векторных уравнений (2.8) и (2.9) заменяется эквивалентной ей системой из шести скалярных уравнений для составляющих векторов поля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (2.10)$$

Для одномерных волновых решений вида (2.6) и (2.7) система уравнений (2.10) значительно упрощается: дифференцирование по времени t приводит к умножению дифференцируемой величины на $i\omega$, дифференцирование по координате z заменяется умножением на $-\gamma$ и, наконец, все производные по координате x равны нулю. При этом получим:

$$\left. \begin{array}{|l} \text{а) } \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -i\omega\mu H_x, \\ \text{б) } -\gamma E_x = -i\omega\mu H_y, \\ \text{в) } -\frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{|l} \text{г) } \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = i\omega\epsilon E_x \\ \text{д) } -\gamma H_x = i\omega\epsilon E_y \\ \text{е) } -\frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z \end{array} \right\}. \quad (2.11)$$

Полученная система (2.11) распадается на две независимые системы: 1) систему уравнений (2.11 б, в, г,) для составляющих поля E_x , H_y и H_z ; 2) систему уравнений (2.11 а, д, е) для составляющих поля E_z , E_y и H_x . В тексте эти системы разделены одна от другой.

Рассмотрим первую из указанных систем. Соотношение (2.11 б) этой системы характеризует связь составляющих E_x и H_y , поперечных к направлению распространения. Выразая E_x через H_y , найдём

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{\gamma} H_y. \quad (2.12)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.11г), получим

$$-(\omega^2\epsilon\mu + \gamma^2)H_y = \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

Обозначая

$$\omega^2\epsilon\mu + \gamma^2 = k^2 \quad (2.13)$$

¹⁾ При $\gamma \neq 0$ число k отличается от волнового числа для свободного пространства $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

найдем

$$-k^2 H_y = \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (2.14)$$

Тогда

$$E_x = \frac{i \omega \mu}{\gamma} H_y = -\frac{i \omega \mu}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Соотношения (2.14), (2.15) показывают, что обе поперечные составляющие H_y и E_x системы (2.11 б, в, г) выражаются через одну и ту же продольную составляющую H_z . Заменяя в не использованном ещё ур-нии (2.11 в) E_x через H_z , находим для этой составляющей дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k^2 H_z = 0. \quad (2.16)$$

Таким образом, решение системы ур-ний (2.11 б, в, г) сведено к решению дифференциального ур-ния (2.16) для продольной составляющей магнитного поля H_z и последующему расчёту поперечных составляющих H_y и E_x при помощи соотношений (2.14) и (2.15).

Подобный же путь решения можно использовать для системы ур-ний (2.11 а, д, е). Решение этой системы сводится к решению дифференциального уравнения для продольной составляющей электрического поля

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0 \quad (2.17)$$

и последующему расчёту поперечных составляющих E_y и H_x при помощи соотношений:

$$-k^2 E_y = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.18)$$

$$H_x = -\frac{i \omega \varepsilon}{\gamma} E_y. \quad (2.19)$$

Сравнивая две группы полученных соотношений (2.16), (2.14) и (2.12), с одной стороны, и (2.17), (2.18), (2.19), с другой, легко убедиться в их *перестановочной двойственности*, которая заключается в том, что при замене E на H , а μ на ε и обратно, первая группа соотношений переходит во вторую, а вторая в первую. Причина двойственности этих групп лежит в *двойственности* исходных уравнений электромагнитного поля (2.8) и (2.9) ¹⁾.

¹⁾ Принцип двойственности был введён в радиотехническую литературу и получил особенно широкое использование при исследовании вопросов излучения из щелей в результате работ А. А. Пистолькорса (см. также приложение 9.2). Здесь мы встречаемся лишь с одним, и притом сравнительно узким применением принципа двойственности.

§ 2.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Наряду с уравнениями электромагнитного поля для диэлектрической среды в пространстве между проводящими плоскостями, искомые решения должны удовлетворять граничным условиям на поверхности раздела диэлектрика с проводником.

Как известно, для произвольной поверхности раздела двух сред 1 и 2 (рис. 2.2) имеют место следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} E_{\tau 1} - E_{\tau 2} &= 0, & D_{n1} - D_{n2} &= q_S \\ B_{n1} - B_{n2} &= 0, & H_{\tau 1} - H_{\tau 2} &= j_S \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

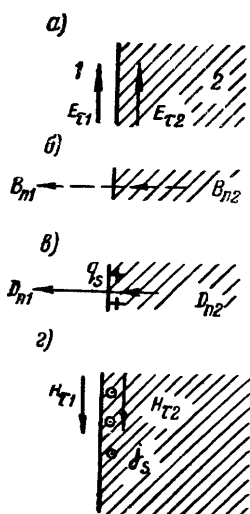


Рис. 2.2. Поля на границе раздела двух сред

Здесь: $E_{\tau 1}$ и $E_{\tau 2}$ — тангенциальные составляющие вектора напряжённости электрического поля (индекс 1 относится к первой, а индекс 2 — ко второй средам); B_{n1} и B_{n2} — нормальные составляющие вектора магнитной индукции; D_{n1} и D_{n2} — нормальные составляющие вектора электрической индукции; $H_{\tau 1}$ и $H_{\tau 2}$ — тангенциальные составляющие вектора напряжённости магнитного поля; q_S — плотность поверхностного заряда (т. е. величина заряда, распределённого по поверхности раздела, приходящаяся на единицу этой поверхности); j_S — плотность поверхностного тока (т. е. величина тока, протекающего по поверхности раздела, которая приходится на единицу длины в направлении, перпендикулярном направлению тока).

Если среда 2 является идеальным проводником, то электрическое, а значит, и переменное магнитное поля в этой среде обращаются в нуль и можно написать:

$$E_{\tau 2} = 0, \quad D_{n2} = 0,$$

$$B_{n2} = 0, \quad H_{\tau 2} = 0.$$

Поэтому на границе с идеальным проводником условия (2.20) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} E_{\tau} &= 0, \quad D_n = q_s \\ B_n &= 0, \quad H_{\tau} = j_s \end{aligned} \right\}. \quad (2.21)$$

В приведённых соотношениях индекс 1 опущен, поскольку в дальнейшем рассматриваются только составляющие поля в диэлектрике.

По своему характеру граничные условия (2.21) разбиваются на две пары. Первая пара граничных условий:

$$E_{\tau} = 0, \quad (2.22)$$

$$B_n = 0 \quad (2.23)$$

налагает определённые ограничения на решения уравнений электромагнитного поля (2.8) и (2.9). Согласно граничным условиям, вектор электрического поля не может иметь тангенциальной составляющей, т. е. должен быть всегда *нормальным* к идеально проводящей поверхности. Вектор магнитной индукции не может иметь нормальной составляющей, т. е. должен идти *касательно* к этой поверхности (рис. 2.3). Условия (2.22) и (2.23) существенно сказываются на структуре электромагнитного поля для каждой конфигурации граничных поверхностей.

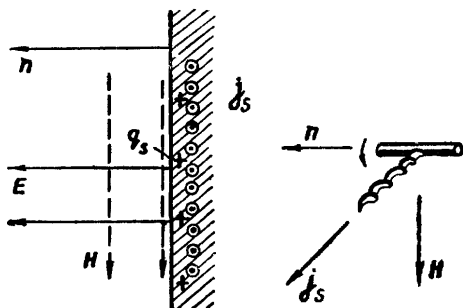


Рис. 2.3. Поля на границе раздела с идеальным проводником

Вторая пара условий (2.21) не предъявляет непосредственных требований к решениям уравнений электромагнитного поля, поскольку величины, стоящие в правой части равенства, обычно не заданы. Эта пара используется главным образом для того, чтобы найти поверхностные плотности тока j_s и заряда q_s на стенках проводника:

$$j_s = H_{\tau}, \quad (2.24)$$

$$q_s = D_n, \quad (2.25)$$

после того как составляющие поля уже найдены.

Заметим попутно, что граничное условие для H_τ используют часто в векторной форме записи

$$\mathbf{j}_S = [\mathbf{n} \mathbf{H}_\tau], \quad (2.26)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности.

Приведённое соотношение соответствует как ур-нию (2.24), так и известному правилу буравчика.

Приступая к решению поставленной задачи, вначале воспользуемся только граничными условиями (2.22) и (2.23). Из трёх составляющих электрического поля в прямоугольной системе координат (рис. 2.1) тангенциальными к проводящим плоскостям являются две — E_x и E_z ; нормальной составляющей магнитной индукции является составляющая $B_y = \mu H_y$. Согласно граничным условиям, все эти составляющие у идеально проводящих плоскостей обращаются в нуль:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } E_x = 0, \text{ б) } E_z = 0, \\ \text{в) } H_y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \\ \text{и } y = b, \end{array} \quad (2.27)$$

в то время как для промежуточных значений координаты y они в общем случае отличны от нуля.

Вообще говоря, можно было ограничиться одним из граничных условий первой пары, например (2.22), так как условие (2.23) не является от него независимым. Если выполнено условие (2.22), то для решений, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, условие (2.23) будет выполнено.

§ 2.4. ТРИ КЛАССА ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

При анализе уравнений электромагнитного поля оказалось, что найденные соотношения можно разбить на две *независимые* группы, а именно: для составляющих E_x , H_y , H_z и составляющих E_z , E_y , H_x . Соответственно двум группам уравнений разбиваются на две группы граничные условия (2.27 а, б, в): условия а и в соответствуют первой группе, а условие б — второй. Каждая из групп соотношений характеризуется дифференциальным ур-нием (2.16) или (2.17) для одной из *продольных* составляющих поля, с которой связаны поперечные составляющие данной группы.

В ходе дальнейшего исследования имеет смысл выделить такие простейшие решения, для которых одна из продольных составляющих обращается в нуль. В связи с этим целесообразно раздельное рассмотрение следующих классов частных решений.

1. Решения, для которых продольная составляющая электрического поля тождественно равна нулю, а продольная составляю-

щая магнитного поля отлична от нуля ($E_z=0, H_z \neq 0$). Волны, соответствующие этим решениям, называются *поперечно-электрическими волнами* и обозначаются буквами *TE*, поскольку векторы электрического поля лежат в поперечной плоскости ¹⁾. Поперечно-электрические волны называются, кроме того, *магнитными волнами* и обозначаются буквой *H*, поскольку они имеют продольную составляющую магнитного поля. Обозначения *TE* и *H* равноценны.

2. Решения, для которых продольная составляющая магнитного поля равна нулю, а продольная составляющая электрического поля отлична от нуля ($H_z=0, E_z \neq 0$). Волны, соответствующие этим решениям, называются *поперечно-магнитными волнами* и обозначаются буквами *TM*. Поперечно-магнитные волны называют, кроме того, *электрическими волнами E*, поскольку они имеют продольную составляющую электрического поля. Обозначения *TM* и *E* равноценны.

3. Возможен *третий класс* решений, для которого обе продольные составляющие поля равны нулю ($E_z=0, H_z=0$). Волны, соответствующие этим решениям, называются *поперечными электромагнитными волнами*, поскольку векторы как электрического, так и магнитного полей для этих волн лежат в поперечной плоскости. Эти волны обозначаются буквами *TEM* ²⁾.

Можно показать, что любое сложное поле между параллельными плоскостями может быть представлено как результат наложения волн *TE*, *TM* и *TEM*. В дальнейшем вместо обозначений *TM* и *TE* будем использовать обозначения *E* и *H* как более краткие.

§ 2.5. ВОЛНА TEM МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Рассмотрение различных классов решений начнём с решения, соответствующего поперечной электромагнитной волне *TEM*, для которой $H_z=0$ и $E_z=0$ во всей исследуемой области пространства.

Обращаясь к выражениям (2.14), (2.18), (2.12), (2.19), связывающим поперечные составляющие поля с продольными, можно написать для волны *TEM*:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } -k^2 H_y &= 0, & \text{б) } -k^2 E_y &= 0 \\ \text{в) } E_x &= \frac{i \omega \mu}{\gamma} H_y, & \text{г) } H_x &= -\frac{i \omega \varepsilon}{\gamma} E_y \end{aligned} \right\}. \quad (2.28)$$

Из соотношений (2.28) следует, что в случае, когда $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2 \neq 0$, все составляющие поля волны обращаются в

¹⁾ Т— первая буква слова transversus— поперечная (лат.)

²⁾ Более кратко эти волны называют поперечными, поскольку как электрической, так и магнитное поля поперечны по отношению к направлению распространения.

нуль. Поскольку такое решение не имеет смысла, для искомого (ненулевого) решения остаётся положить

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_\mu + \gamma^2 = 0. \quad (2.29)$$

Таким образом, для поперечной электромагнитной волны $\gamma^2 = -\omega^2 \epsilon_\mu$ и γ выражается чисто мнимым числом

$$\gamma = \pm i\alpha = \pm i\omega \sqrt{\epsilon_\mu}, \quad (2.30)$$

что характеризует распространение волны вдоль оси z с *неизменной амплитудой*. Два знака, плюс и минус, в соотношении (2.30) соответствуют двум возможным направлениям распространения. Вытекающее из ф-лы (2.30) выражение для фазовой постоянной волны *ТЕМ* между параллельными плоскостями

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon_\mu} \quad (2.31)$$

совпадает с выражением фазовой постоянной плоской однородной волны в свободном пространстве. Последнее свидетельствует о том, что в обоих указанных случаях закон распределения фазы вдоль направления распространения при заданной частоте ω является одинаковым, а параметры волн: фазовая скорость $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\mu}}$

и длина волны $\lambda = \frac{v_\phi}{f}$ (известные из соответствующего раздела курса основ радиотехники) совпадают.

Общность распределения поля вдоль направления распространения связана с общностью распределения поля в поперечной плоскости. Согласно выражениям (2.11*в* и *е*), при $H_z = 0$ и $E_z = 0$ две поперечные составляющие E_x и H_x не зависят от координаты y , так как $\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$. Две остальные поперечные составляющие H_y и E_y также не изменяются вдоль координаты y ввиду того, что они связаны с E_x и H_x пропорциональными зависимостями. Поскольку ранее было принято, что поле не зависит от координаты x , последнее означает, что *составляющие поля вообще не изменяются в плоскости $хоу$* . Волна *ТЕМ* между параллельными плоскостями является таким образом *плоской однородной волной*, подобно плоской однородной волне в свободном пространстве.

Особенностью рассматриваемой волны является то, что она обладает *вполне определённой поляризацией поля*. В частности, она совсем не содержит составляющих E_x и H_y . Последние обращаются в нуль у идеально проводящих стенок; поскольку же рассматриваемая волна *однородна* в произвольном поперечном сечении, эти составляющие должны быть *тождественно равны нулю*. Исследуемая волна содержит только две составляющие E_y и H_x и поляризована так, что *электрическое поле перпенди-*

кулярно, а магнитное — параллельно проводящим плоскостям. Обращаясь к выражениям (2.4) и (2.5), решение записываем в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_y(z,t) &= E'_y e^{i\omega t - \gamma z} \\ H_x(z,t) &= H'_x e^{i\omega t - \gamma z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.32)$$

Здесь в силу однородного характера волны E'_y и H'_x — величины постоянные.

Связь между составляющими поля E_y и H_x определяем из соотношения (2.28 г), которое после замены $\gamma = i\omega\sqrt{\epsilon\mu}$ принимает вид

$$H_x = -E_y \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = -\frac{E_y}{\rho_0}, \quad (2.33)$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.34)$$

представляет собой отношение поперечных составляющих электрического и магнитного полей волны *ТЕМ* и называется *волновым сопротивлением*.

Волновое сопротивление для волны *ТЕМ* между проводящими плоскостями совпадает с волновым сопротивлением диэлектрической среды. В случае пустоты (а практически и для воздуха), когда $\epsilon = \epsilon_0$ и $\mu = \mu_0$, волновое сопротивление $\rho_0 = 120\pi \approx 377$ ом.

Заменяя одну из постоянных в (2.32) через модуль и аргумент подставляя $\gamma = i\alpha$ и используя соотношение (2.33), получим:

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_{ym} e^{i(\omega t - \alpha z + \theta)} \\ H_x &= -\frac{E_{ym}}{\rho_0} e^{i(\omega t - \alpha z + \theta)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.35)$$

Беря от полученных соотношений реальную часть, находим окончательные выражения для мгновенных значений составляющих поля в тригонометрической форме:

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_{ym} \cos(\omega t - \alpha z + \theta) \\ H_x &= -\frac{E_{ym}}{\rho_0} \cos(\omega t - \alpha z + \theta) \end{aligned} \right\}. \quad (2.36)$$

Структура поля поперечной электромагнитной волны имеет вид, изображённый на рис. 2.4. Как видно, электрическое и магнитное поля волны *ТЕМ* однородны в плоскости поперечного сечения и синусоидально распределены вдоль оси z в соответствии с законом бегущей волны (рис. 2.4а и б). При движении волны

составляющие поля в каждой точке пространства изменяются во времени по гармоническому закону. Взаимная ориентация векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в произвольном поперечном сечении всегда остаётся такой, что вектор плотности потока энергии $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ направлен вдоль оси z в сторону движения волны (рис. 2.4б).

Картину (рис. 2.4) можно также получить, считая известным распределение поля плоской однородной волны в свободном пространстве. Пусть вектор $\mathbf{E}$ этой волны направлен вдоль оси y . Поставим нормально оси y две идеально проводящие плоскости. Исходное поле не будет при этом нарушено, так как оно удовлетворяет граничным условиям на плоскостях. Поле в пространстве между плоскостями будет, очевидно, полем волны TEM . Это

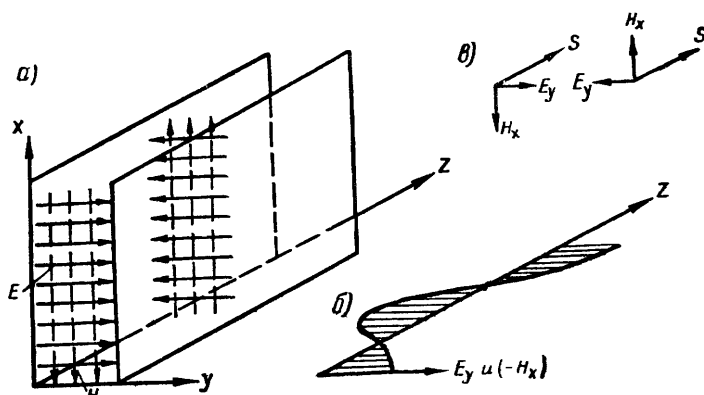


Рис. 2.4. Структура поля волны TEM между параллельными плоскостями.

а) объёмное изображение поля; б) распределение составляющих поля вдоль оси z ; в) взаимная ориентация векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{S}$

значит, что структура поля волны TEM между параллельными плоскостями совпадает с соответствующей структурой поля плоской однородной волны в свободном пространстве.

Как следует из граничных условий, на проводящих плоскостях наводятся электрические заряды q_s , а вдоль плоскостей текут поверхностные токи $\mathbf{j}_s$. Положительные заряды соответствуют тем участкам плоскостей, из которых линии электрического поля выходят, отрицательные — тем, куда эти линии входят. Направление поверхностного тока определяется соотношением (2.26). Ток направлен в сторону движения волны там, где концентрируются положительные, и в противоположную сторону — там, где концентрируются отрицательные заряды.

Небезынтересно отметить, что систему плоскостей при волне TEM можно рассматривать как своеобразную длинную линию. Это будет более наглядно, если из плоскостей выделить две параллельные ленты произвольной ширины a (рис. 2.5). Линии магнитного поля, окружающие ленты, при $a \rightarrow \infty$

переходят в прямые, параллельные плоскостям. Ленты можно рассматривать как пару проводов, по которым течёт ток и между которыми приложено напряжение. Напряжение и ток рассчитываются по формулам:

$$u = -\int E dl = -\int_{y=0}^b E_y dy = -bE_y,$$

$$i = \int_{x=0}^a J_{Sz} dx = \int_{x=0}^a H_x dx = aH_x.$$

Расчёт произведён для тока правой ленты и напряжения её относительно левой в предположении, что структура поля такая же, как между плоскостями. Можно ввести волновое сопротивление ленточной линии по напряжению и току

$$\rho_L = \frac{u}{i} = \left(-\frac{E_y}{H_x} \right) \frac{b}{a} = \rho_0 \frac{b}{a},$$

которое выражается через волновое сопротивление ρ_0 , так как напряжение u пропорционально E_y , а ток i пропорционален H_x .

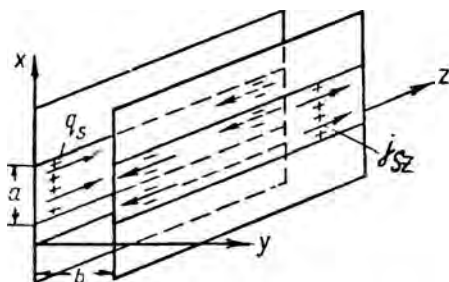


Рис. 2.5. Пояснение аналогии между системой плоскостей при волне TEM и длинной линией

§ 2.6. ВОЛНЫ ТИПА H МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ. ВИДЫ ВОЛН. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ В ПОПЕРЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

По определению волны типа H имеют продольную составляющую магнитного поля H_z и не имеют продольной составляющей электрического поля ($E_z = 0$). Закон распределения продольной составляющей магнитного поля определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k^2 H_z = 0. \quad (2.37)$$

Граничное условие для продольной составляющей магнитного поля H_z можно найти, заменив в граничном условии (2.27а) поперечную составляющую $E_x = 0$ продольной H_z , согласно ур-нию (2.15),

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = b. \quad (2.38)$$

Чтобы избежать расчётов с функциями многих переменных, выразим в соотношениях (2.37), (2.38) продольную составляющую магнитного поля

$$H_z(y, z, t) = H'_z(y) e^{i\omega t - \gamma z}$$

и её частные производные по y через функцию распределения $H'_z(y)$ и соответствующие её производные. Произведя сокращение

на волновой множитель $e^{i\omega t - \gamma z}$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 H'_z}{dy^2} + k^2 H'_z = 0 \quad (2.39)$$

с граничным условием

$$\frac{dH'_z}{dy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b. \quad (2.40)$$

Решение дифференциального уравнения (2.39) имеет вид

$$H'_z(y) = A \cos ky + B \sin ky,$$

так что

$$\frac{dH'_z}{dy} = -Ak \sin ky + Bk \cos ky.$$

Используя граничные условия (2.40) при $y = 0$ и $y = b$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} Bk &= 0 \\ -Ak \sin kb + Bk \cos kb &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Система удовлетворяется и даёт ненулевое решение для H_z при $B = 0$ и $\sin kb = 0$, откуда

$$H'_z = A \cos ky \quad (2.42)$$

и

$$k = \frac{n\pi}{b}, \quad (2.43)$$

где n — целые числа.

С математической точки зрения следует обратить внимание на то, что решения дифференциального уравнения (2.39) удовлетворяют граничным условиям (2.40) далеко не при всяких значениях параметра уравнения k^2 (речь идёт о решениях, отличных от нуля). Соотношение (2.43) показывает, что существуют дискретные значения параметра k^2 , соответствующие целым n , при которых удовлетворяются заданные граничные условия (2.42). Эти значения параметра k^2 условимся называть *собственными значениями*, а соответствующие им числа $k = \frac{n\pi}{b}$ — *собственными числами*.

Искомое выражение для продольной составляющей H_z имеет вид

$$H_z = A \cos ky e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (2.44)$$

Выражая поперечные компоненты H_y и E_x через продольную H_z , из соотношений (2.14) и (2.12) найдём:

$$H_y = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\gamma}{k} A \sin ky e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (2.45)$$

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{\gamma} H_y = \frac{i\omega\mu}{k} A \sin ky e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (2.46)$$

Величину отношения поперечных составляющих

$$\rho_H = \frac{E_x}{H_y} = \frac{i\omega\mu}{\gamma} \quad (2.47)$$

будем называть *волновым сопротивлением для волны H*.

Подставляя значения собственных чисел $k = \frac{n\pi}{b}$ в выражения для составляющих поля (2.44), (2.45), (2.46), преобразуем эти выражения к виду:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= A \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z} \\ H_y &= \frac{\gamma b}{n\pi} A \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z} \\ E_x &= \frac{i\omega\mu b}{n\pi} A \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.48)$$

На основе полученных выражений изучим картину распределения поля в плоскости поперечного сечения. Координату z считаем при этом фиксированной.

Каждое из выражений (2.48) представляет собой произведение двух функций — пространственной и временной — и соответствует распределению поля в поперечном сечении по закону стоячей волны с фиксированным положением узлов и пучностей.

В отличие от волн *ТЕМ*, волны *H* бывают различных видов, каждый из которых характеризуется целым числом n [т. е. соответствует различным собственным значениям k^2 дифференциального уравнения (2.39)]. Число n показывает, сколько полупериодов пространственного изменения поля укладывается вдоль оси y между параллельными плоскостями. В зависимости от числа полупериодов n волны *H* обозначаются H_n . Для волны H_1 (рис. 2.6а) между плоскостями укладывается один полупериод поля. Для волны H_2 (рис. 2.6б) таких полупериодов укладывается два.

Равномерного распределения магнитного поля между плоскостями ($n = 0$, $k = 0$) быть не может, так как оно соответствовало бы однородной волне. В случае однородного поля $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ и в силу соотношения (2.11в) составляющая H_z тождественно равна нулю.

Положение узлов и пучностей различных составляющих поля определяется граничными условиями у идеально проводящих плос-

костей. На рис. 2.6 представлены кривые распределения трёх составляющих поля E_x , H_y и H_z для волн H_1 и H_2 . Ввиду того, что поперечная составляющая электрического поля E_x является по отношению к идеально проводящим стенкам тангенциальной, а поперечная составляющая H_y — нормальной составляющей, у стенок

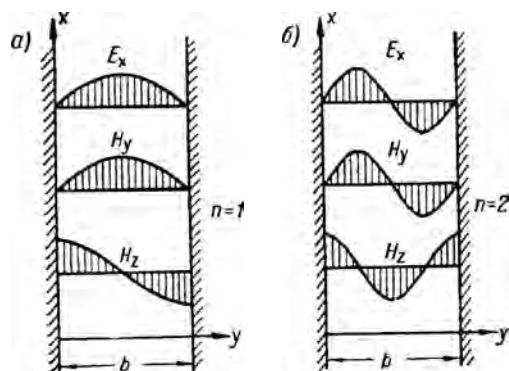


Рис. 2.6. Графики распределения составляющих поля в поперечном сечении:

а) для волны H_1 ; б) для волны H_2

располагаются *узлы* пространственного распределения поля этих составляющих. Для продольной составляющей магнитного поля H_z у идеально проводящих стенок располагаются *экстремумы* кривой распределения. Экстремумы продольной составляющей H_z , тангенциальной к поверхности стенок, связаны с *протеканием токов по плоскостям*

У плоскостей располагаются, таким образом, *пучности стоячей волны* для составляющей H_z и *узлы* — для составляющих E_x и H_y .

Все остальные составляющие поля волн H_n ($n = 1, 2, \dots$), кроме H_z , H_y и E_x , тождественно равны нулю во всём пространстве между плоскостями: продольная составляющая E_z — по определению, поперечные составляющие E_y и H_x — как выраженные через продольную E_z . Из соотношений (2.18) и (2.19) при $k^2 \neq 0$ можно получить

$$\left. \begin{aligned} E_y = E_z = 0 \\ H_x = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.49)$$

§ 2.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ВОЛН ТИПА H ВДОЛЬ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ. КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА И КРИТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ

Распределение составляющих поля вдоль оси z в различные моменты времени t описывается волновым множителем $e^{i\omega t - \gamma z}$. Величина постоянной распространения γ может быть определена из соотношения (2.13)

$$\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu. \quad (2.50)$$

В отличие от волны TEM , собственное значение k^2 которой равно нулю, собственные значения волн H_n положительны и отличны от нуля

$$k^2 = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 (n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому в зависимости от частоты ω квадрат постоянной распространения γ^2 может выражаться как отрицательным, так и положительным числом, а также может быть равным нулю.

Частота ω , при которой постоянная распространения γ обращается в нуль, называется *критической частотой*. Критическая частота $\omega_{кр}$ определяется из соотношения (2.50)

$$k^2 - \omega_{кр}^2 \epsilon \mu = 0.$$

Таким образом, критическая частота

$$\omega_{кр} = \frac{k}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (2.51)$$

или

$$\omega_{кр} = k v, \quad (2.52)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ — скорость света в данной среде.

Если частота ω выше критической, то, как видно из соотношения (2.50), $\gamma^2 < 0$ и постоянная распространения γ выражается чисто мнимым числом

$$\gamma = i \alpha. \quad (2.53)$$

При этом постоянная затухания β равна нулю, а фазовая постоянная

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k^2}. \quad (2.54)$$

Если частота ω ниже критической, то $\gamma^2 > 0$ и постоянная распространения γ выражается чисто вещественным числом

$$\gamma = \beta. \quad (2.55)$$

В этом случае фазовая постоянная α равна нулю, а постоянная затухания

$$\beta = \sqrt{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu}. \quad (2.56)$$

В выражениях (2.54) и (2.56) для α и β взяты только положительные значения корней. Случай отрицательных корней рассматривается ниже.

В зависимости от того, будет ли частота выше критической, ниже критической или равна критической частоте, имеет место различный характер распределения поля вдоль оси z . Волновой множитель $e^{i\omega t - \gamma z}$ для этих трёх случаев записывается по-разному:

$$e^{i(\omega t - \alpha z)} \text{ при } \omega > \omega_{кр},$$

$$e^{-\beta z} e^{i\omega t} \text{ при } \omega < \omega_{кр},$$

$$e^{i\omega t} \text{ при } \omega = \omega_{кр}.$$

Первый случай соответствует волне, бегущей вдоль оси z . Амплитуда колебаний вдоль этой оси не меняется, а фаза колебаний меняется от точки к точке; скорость изменения фазы характеризуется фазовой постоянной α . Таким образом, случай $\omega > \omega_{кр}$ — это случай *распространяющейся волны*. График распределения поля этой волны для двух последовательных моментов времени t показан на рис. 2.7а.

Во втором случае фаза колебаний во всех точках одинакова, однако амплитуда колебаний изменяется от точки к точке по

экспоненциальному закону. Экспоненциальное убывание амплитуды характеризуется постоянной затухания β . Бегущая волна при этом вырождается в *стоячую*, которая отличается от стоячей волны в длинной линии только тем, что изменение амплитуды происходит по *экспоненциальному*, а не по *синусоидальному* закону. Итак, случай $\omega < \omega_{кр}$ — это *случай нераспространяющегося, экспоненциально убывающего поля*. График распределения этого поля вдоль оси z для различных моментов времени t показан на рис. 2.7б.

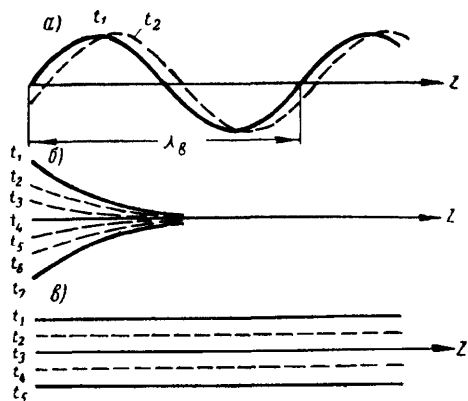


Рис. 2.7. Графики распределения поля вдоль оси z для различных моментов времени:

- а) при $\omega > \omega_{кр}$; б) при $\omega < \omega_{кр}$;
в) $\omega = \omega_{кр}$

В третьем случае вдоль оси z не меняется ни амплитуда, ни фаза колебаний. График распределения поля вдоль оси z изображается прямой линией, положение которой изменяется со временем по гармоническому закону (рис. 2.7в). Этот случай соответствует *переходу от распространяющихся* ($\omega > \omega_{кр}$) *к нераспространяющимся волнам*, т. е. к *экспоненциально убывающим полям* ($\omega < \omega_{кр}$) при постепенном изменении частоты возбуждаемых колебаний.

Нетрудно проследить, как происходит такой переход. Пусть частота возбуждаемых колебаний ω , которая вначале была выше критической, постепенно уменьшаясь, приближается к критической частоте. Как видно из соотношения (2.54), одновременно с частотой ω уменьшается фазовая постоянная α и на критической частоте она обращается в нуль. Кривая распределения поля (рис. 2.7а) при этом растягивается вдоль оси z . На критической частоте имеем распределение поля (рис. 2.7в), равномерное вдоль направления распространения.

С дальнейшим уменьшением частоты начинается экспоненциаль-

ное спадание амплитуды колебаний (рис. 2.76). По мере того, как частота ω , уменьшаясь, удаляется от критической частоты, постоянная затухания β , определяемая соотношением (2.56), возрастает. Иначе говоря, расстояние $d = \frac{1}{\beta}$, на котором поле изменяется в e раз, уменьшается. Если при $\omega = \omega_{кр}$ значение $d = \frac{1}{\beta} = \infty$, то при $\omega = 0$ значение

$$d = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{k} = \frac{b}{n\pi},$$

т. е. при $n = 1$ оно в π раз меньше расстояния между плоскостями. При уменьшении частоты ω от $\omega_{кр}$ до нуля значение d монотонно изменяется от ∞ до $\frac{b}{n\pi}$.

Критические частоты для разных видов колебаний H различны. Значения этих частот можно найти из соотношения (2.52), подставляя значения собственных чисел k из соотношения (2.43),

$$\omega_{кр} = \frac{n\pi}{b}v. \quad (2.57)$$

В случае пустоты (т. е. практически и для воздуха)

$$\omega_{кр} = \frac{n\pi c}{b}, \quad (2.58)$$

где c — скорость света в пустоте.

Переходя от круговых частот к циклическим, получим

$$f_{кр} = \frac{nc}{2b}. \quad (2.59)$$

Приведённые соотношения показывают, что для каждого вида колебаний имеет место своё значение критической частоты. Критическая частота тем выше, чем меньше расстояние b между плоскостями и чем больше число n . *Наименьшей критической частотой обладает вид колебаний H_1 .* В этом случае требуется наименьшая частота генератора для того, чтобы имело место распространение волн.

Наряду с понятием критической частоты, часто вводится понятие *критической длины волны*, весьма удобное для технических расчётов. Длина волны используется при этом лишь как мера критической частоты. В качестве такой меры удобно брать длину

волны в свободном пространстве, соответствующую критической частоте¹⁾.

Итак, критической длиной волны называют длину волны в свободном пространстве, соответствующую критической частоте,

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}}. \quad (2.60)$$

Для рассматриваемых волн H_n

$$\lambda_{кр} = \frac{2b}{n}. \quad (2.61)$$

Как и критическая частота, критическая длина волны зависит от размера b и от типа колебаний, характеризуемого числом n . В простейшем случае, когда $n=1$,

$$\lambda_{кр} = 2b. \quad (2.62)$$

Пользуясь понятием критической длины волны, законы распределения поля вдоль направления распространения, соответствующие графикам (рис. 2.7), можно сформулировать следующим образом.

Волны H , для которых длина волны генератора $\lambda < \lambda_{кр}$ ($f > f_{кр}$), распространяются между плоскостями, а волны H , для которых длина волны генератора $\lambda > \lambda_{кр}$ ($f < f_{кр}$), — экспоненциально затухают.

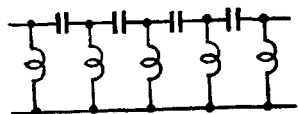


Рис. 2.8. Схема цепочечного фильтра верхних частот

Следует иметь в виду, что с существованием критических частот и длин волн приходится сталкиваться не только в теории распространения электромагнитных волн. Подобные явления встречаются в некоторых электрических цепях, состоящих из элементов с сосредоточенными параметрами.

На рис. 2.8 показана схема цепочечного фильтра верхних частот, состоящего из сосредоточенных индуктивностей и емкостей. Из теории фильтров известно, что такой фильтр пропускает колебания всех частот выше некоторой частоты среза $\omega_{ср}$ и резко ослабляет колебания частот, меньших $\omega_{ср}$. Наиболее просто поддается анализу фильтр

¹⁾ После установления вынужденных колебаний в какой-либо системе частота ω будет одной и той же для всех точек системы, значения длины волны могут быть различными (например, в случае, когда к генератору подключены отрезки кабеля с разными диэлектриками). Своеобразно влияют на распределение поля вдоль оси z и идеально проводящие плоскости (рис. 2.7). В критическом случае здесь нельзя и говорить о длине волны, а в тех случаях, когда это можно (рис. 2.7а), длина волны сложным образом зависит от частоты. В качестве меры частоты поэтому и используют длину волны в свободном пространстве, заполненном данной средой.

с бесконечным числом звеньев. Амплитуда напряжения для такого фильтра при частоте выше ω_{cr} не меняется при переходе от звена к звену, а фаза колебаний при переходе от звена к звену изменяется на постоянную величину. При частоте ниже ω_{cr} фаза колебаний оказывается одинаковой для всех звеньев, а амплитуда при переходе от звена к звену изменяется в одно и то же число раз.

Таким образом, между явлением критических частот при распространении электромагнитных волн и соответствующим явлением в фильтрах *имеется прямое сходство*. Различие сводится лишь к тому, что изменения амплитуды и фазы в пространстве между плоскостями происходят *непрерывно*, а в фильтре — *дискретно* при переходе от звена к звену.

Ослабление амплитуды колебаний *вдоль плоскостей* при $\omega < \omega_{cr}$ или *вдоль фильтра* при $\omega < \omega_{cr}$ не следует смешивать с затуханием амплитуды по длине линии с потерями или с затуханием колебаний во времени в режиме свободных колебаний, связанным с потерей энергии в линии или в колебательной системе. В бесконечном же идеальном фильтре или между идеально проводящими плоскостями *потери энергии нет*. Если включить на вход идеального фильтра генератор, рабочая частота которого ниже частоты среза, то активная мощность расходуется лишь в процессе установления колебаний. В режиме установившихся колебаний от генератора поступает только реактивная мощность. Ток и напряжение на входе фильтра сдвинуты по фазе на четверть периода. Волновое сопротивление фильтра реактивно, поэтому *убывание амплитуды от звена к звену фильтра не связано с потерями энергии, а определяется особенностями распределения напряжений и токов между реактивными элементами системы*.

Подобные же явления наблюдаются и при распространении волн H между бесконечными идеально проводящими плоскостями. При $\omega > \omega_{cr}$ волновое сопротивление ρ_H активно

$$\rho_H = \frac{i \omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu}{\alpha} . \quad (2.63)$$

В этом случае поперечные составляющие поля E_x и H_y синфазны, составляющая вектора Умова — Пойнтинга S_z в любой момент времени направлена вдоль направления движения волны. Энергия передаётся, и на поддержание поля должна расходоваться активная мощность.

При $\omega < \omega_{cr}$ волновое сопротивление реактивно

$$\rho = \frac{i \omega \mu}{\gamma} = \frac{i \omega \mu}{\beta} . \quad (2.64)$$

Это значит, что поперечные компоненты E_x и H_y сдвинуты по фазе на четверть периода. Вектор Умова — Пойнтинга в этом случае постоянно меняет своё направление, причём в сторону

положительных и отрицательных z он направлен равные промежутки времени. Энергия в среднем не передаётся, и на поддержание поля расходуется чисто реактивная мощность.

Итак, *распространение волны при $\omega > \omega_{кр}$ связано с переносом активной мощности, в то время как на поддержание нераспространяющихся полей при $\omega < \omega_{кр}$ требуется одна только реактивная мощность.* Это значит, что убывание амплитуды вдоль оси z при $\omega < \omega_{кр}$ не вызывается потерями энергии, а определяется особенностями распределения полей в пространстве в окрестности возбуждающих эти поля устройств.

Выше, анализируя фазовую постоянную α и постоянную затухания β [соотношения (2.54) и (2.56)], мы ограничились рассмотрением лишь положительных значений этих величин. Случай отрицательной фазовой постоянной α также означает распространение волны по направлению от возбуждающего источника, но в сторону отрицательных z . Случай отрицательной постоянной затухания β означает экспоненциальное убывание амплитуд по направлению от возбуждающего источника в сторону отрицательных z . Таким образом, отрицательные значения α и β не свидетельствуют о наличии качественно новых явлений.

Главным во всём предыдущем рассмотрении являлось *изменение характера распространения при переходе частоты через критическое значение.* Изученное явление присуще не только системе плоскостей или фильтрам, оно определяет основные особенности распространения электромагнитных колебаний по полым металлическим трубам.

§ 2.8. ДЛИНА ВОЛНЫ, ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ВОЛН ТИПА H МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ ПРИ $\omega > \omega_{кр}$

Система параллельных плоскостей является простейшим примером волновода.

Длиной волны в волноводе λ_g будем называть минимальное расстояние между поперечными сечениями вдоль оси z , колебания в которых происходят в фазе (рис. 2.7а) Написав волновой множитель

$$e^{i\omega t - \gamma z} = e^{i(\omega t - \alpha z)},$$

замечаем, что при $\alpha z = 0$ и $\alpha z_1 = 2\pi$ он имеет одно и то же значение, т. е. величину λ_g можно определить из условия $\alpha \lambda_g = 2\pi$, откуда

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (2.65)$$

Преобразуя выражение (2.54) для фазовой постоянной α

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \omega_{кр}^2 \epsilon \mu} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2}}, \quad (2.66)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ — скорость света в диэлектрической среде, и замечая, что $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$, а $\omega_{кр} = \frac{2\pi v}{\lambda_{кр}}$, найдём

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}, \quad (2.67)$$

откуда

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (2.68)$$

График зависимости λ_g от λ представлен на рис. 2.9. Величина λ_g мало отличается от λ при $\lambda \ll \lambda_{кр}$ и стремится к бесконечности по мере приближения λ к $\lambda_{кр}$. Последнее соответствует постепенно му переходу от случая, когда $\omega > \omega_{кр}$ (рис. 2.7а), к случаю, когда $\omega = \omega_{кр}$ (рис. 2.7в).

С длиной λ_g , распространяющейся вдоль плоскостей волны, тесно связана величина *волнового сопротивления*, представляющего собой отношение поперечных составляющих поля E_x и H_y . При частоте выше критической, т. е. для распространяющейся волны, волновое сопротивление активно и определяется выражением (2.63). Заменяя в этом выражении $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ и $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} =$

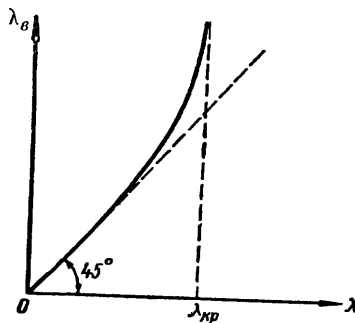


Рис. 2.9. График зависимости длины волны в волноводе λ_g от длины волны генератора λ

$= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, преобразуем его к виду

$$\rho_H = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_g}{\lambda} = \rho_0 \frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (2.69)$$

Используя понятия длины волны в волноводе λ_g и волнового сопротивления ρ_H , перейдём к преобразованию выражений (2.48) для составляющих поля при $\omega > \omega_{кр}$, когда $\gamma = i\alpha$. Обозначая коэффициенты при составляющих соответственно $\dot{H}_{zm}$, $\dot{H}_{ym}$ и $\dot{E}_{xm}$, получим:

$$\dot{H}_{zm} = A; \quad \dot{H}_{ym} = \frac{i\alpha b}{n\pi} A = i \frac{2b}{n\lambda_g} A;$$

$$\dot{E}_{xm} = i \frac{\omega\mu}{n\pi} A = i \rho_H \frac{2b}{n\lambda_g} A.$$

Выражая коэффициент A через E_{xm} , соотношения (2.48) представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \dot{E}_{xm} \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ H_y &= \frac{\dot{E}_{xm}}{\rho_H} \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ H_z &= -i \frac{\dot{E}_{xm} n \lambda_s}{\rho_H 2b} \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.70)$$

Переходя далее к тригонометрической форме записи, возьмём от написанных комплексных выражений реальную часть, предварительно заменив комплексную величину $\dot{E}_{xm} = E_{xm} e^{i\theta}$ через её модуль и аргумент. Полагая для простоты аргумент θ равным нулю, получим:

$$E_x = E_{xm} \sin \frac{n\pi}{b} y \cos(\omega t - \alpha z), \quad (2.71)$$

$$H_y = \frac{E_{xm}}{\rho_H} \sin \frac{n\pi}{b} y \cos(\omega t - \alpha z), \quad (2.72)$$

$$H_z = \frac{E_{xm} n \lambda_s}{\rho_H 2b} \cos \frac{n\pi}{b} y \sin(\omega t - \alpha z). \quad (2.73)$$

Коэффициент E_{xm} характеризует здесь максимальное значение амплитуды электрического поля в пространстве между плоскостями.

§ 2.9. СТРУКТУРА ПОЛЯ ВОЛН ТИПА H ПРИ $\omega > \omega_{кр}$

Используя выражения (2.71) ÷ (2.73) для составляющих поля волн типа H , приступим к изучению структуры поля этих волн, некоторые особенности которых были уже рассмотрены в предыдущих параграфах. При изучении структуры поля ограничимся случаем, когда частота колебаний выше критической. На рис. 2.10 дано изображение поля волны H_1 ($n=1$).

Картина поля представлена в двух проекциях для фиксированного момента времени $t=0$ (рис. 2.10а, б). Сплошными линиями показаны линии электрического поля, пунктиром — линии магнитного поля. С течением времени картина поля перемещается в сторону положительных значений координаты z , а составляющие поля в каждой точке изменяются по гармоническому закону.

Поскольку электрическое поле имеет только одну составляющую E_x вдоль оси x , линии электрического поля идут параллельно этой оси (рис. 2.10а). На рис. 2.10б показаны сечения этих линий в виде точек, если линии идут на читателя, и в виде крестиков, если они идут от него.

Распределение электрического поля в поперечной плоскости xoy соответствует закону стоячей волны и выражается множителем $\sin \frac{n\pi}{b} y$ в ф-ле (2.71). Для

$n = 1$ между плоскостями укладывается одна стоячая полуволна. В центре сечения электрическое поле максимально, что изображается наибольшей густотой линий поля. У плоскостей, в соответствии с граничными условиями, электрическое поле спадает до нуля.

Распределение электрического поля в плоскости zoy (рис. 2.10б) определяется произведением двух множителей $\sin \frac{\pi}{b} y$ и $\cos(\omega t - \alpha z)$. Первый из них характеризует распределение поля вдоль оси y

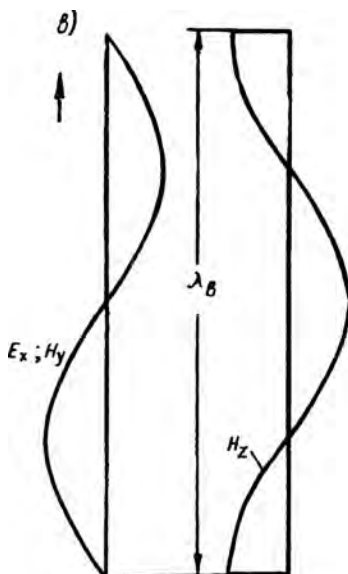
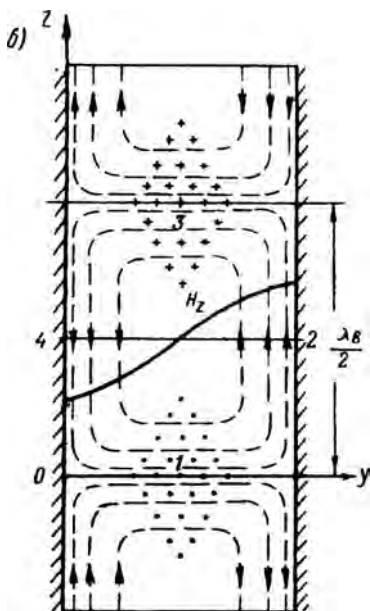
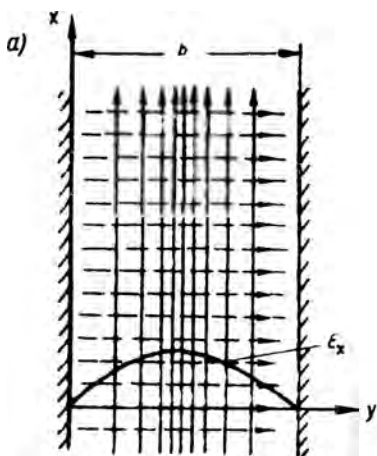


Рис. 2.10. Структура поля волны H_1 между параллельными плоскостями

и соответствует рассмотренному уже закону стоячей волны. Второй множитель характеризует распределение поля вдоль

оси z (рис. 2.10в для $t = 0$) и соответствует закону бегущей волны

$$\cos(\omega t - \alpha z)|_{t=0} = \cos \alpha z = \cos \frac{2\pi}{\lambda_g} z.$$

В соответствии с множителями распределения определяются густота и направление линий поля. Например, в точке 1 ($y = \frac{b}{2}$, $z = 0$) оба множителя распределения максимальны и по-

ложительны, так что $E_x > 0$. Линии электрического поля идут вдоль оси x (т. е. на рис. 2.10б в сторону читателя) и условно изображаются точками. Густота линий поля в окрестности точки 1 наибольшая.

Подобным же образом, в точке 3 ($y = \frac{b}{2}$, $z = \frac{\lambda_g}{2}$) один из множителей распределения отрицателен ($\cos \frac{2\pi}{\lambda_g} \frac{\lambda_g}{2} = \cos \pi = -1$) и, значит $E_x < 0$. Линии электрического поля идут от читателя и условно изображены крестами. В дополнение к рис. 2.10 распределение составляющей электрического поля E_x в плоскости yoz иллюстрируется объёмным графиком (рис. 2.11).

Перейдём к анализу распределения составляющих магнитного поля.

Как следует из соотношения (2.72), распределение поперечной составляющей магнитного поля H_y совпадает с

распределением поперечной составляющей электрического поля E_x .

Характер распределения продольной составляющей магнитного поля H_z по осям y и z показан на рис. 2.10б, в. Распределение вдоль оси y соответствует закону косинуса. Распределение вдоль оси z определяется выражением

$$\sin(\omega t - \alpha z)|_{t=0} = \sin(-\alpha z) = -\sin \frac{2\pi}{\lambda_g} z.$$

Поскольку составляющая H_x отсутствует, линии магнитного поля располагаются в плоскости yoz . Зная закон распределения составляющих H_y и H_z , нетрудно построить векторы $\mathbf{H}$ для произвольных точек этой плоскости и, следовательно, установить расположение векторных линий магнитного поля.

В качестве примера определим направление векторов $\mathbf{H}$ в точках 1, 2, 3 и 4 на плоскости yoz . Используя соотношения (2.72)

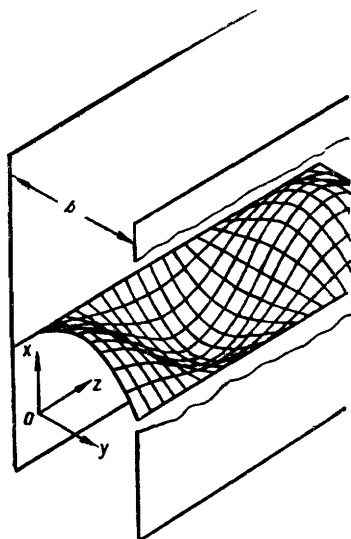


Рис. 2.11. Объёмный график распределения электрического поля волны H_1

и (2.73), находим направление составляющих H_y и H_z в указанных точках (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Точка	Координаты	Составляющие	Направление вектора магнитного поля
1	$y = \frac{b}{2}; z = 0$	$H_y > 0; H_z = 0$	В сторону положительных y
2	$y = b; z = \frac{\lambda_g}{4}$	$H_y = 0; H_z > 0$	В сторону положительных z
3	$y = \frac{b}{2}; z = \frac{\lambda_g}{2}$	$H_y < 0; H_z = 0$	В сторону отрицательных y
4	$y = 0; z = \frac{\lambda_g}{4}$	$H_y = 0; H_z < 0$	В сторону отрицательных z

Построив векторы магнитного поля, можно нанести векторные линии как огибающие семейства векторов. В частности, векторная линия магнитного поля, проходящая через точки 1, 2, 3 и 4 (рис. 2.12), представляет собой замкнутую кривую, касательную к идеально проводящей поверхности стенок.

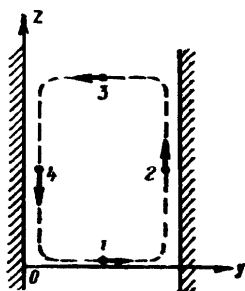


Рис. 2.12. Построение линий поля как огибающих семейства векторов

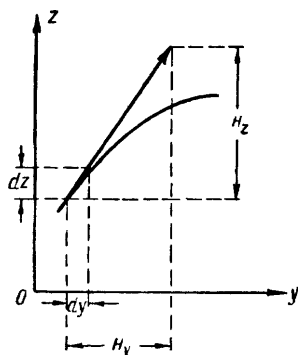


Рис. 2.13. Пояснение дифференциального уравнения линий поля

Более детальное и точное построение линий магнитного поля может быть проведено на основе решения дифференциального уравнения этих линий. Исходя из того, что векторная линия в любой точке касательна к соответствующему вектору поля, и пользуясь рис. 2.13, это уравнение напомним в виде

$$\frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}.$$

Подставляя сюда значения H_y и H_z из соотношений (2.72) и (2.73), для $n = 1$ и $t = 0$ получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2b}{\lambda_g} \operatorname{tg} \frac{\pi}{b} y \operatorname{ctg} \left(-\frac{2\pi}{\lambda_g} z \right).$$

Разделяя переменные, преобразуем его к виду

$$\frac{d \left(\sin \frac{\pi}{b} y \right)}{\sin \frac{\pi}{b} y} + \frac{d \left(\sin \frac{2\pi}{\lambda_g} z \right)}{\sin \frac{2\pi}{\lambda_g} z} = 0$$

или

$$d \ln \left(\sin \frac{\pi}{b} y \sin \frac{2\pi}{\lambda_g} z \right) = 0.$$

Отсюда приходим к уравнению силовой линии

$$\sin \frac{\pi}{b} y \sin \frac{2\pi}{\lambda_g} z = C. \quad (2.74)$$

Задаваясь различными значениями постоянной C ($|C| \leq 1$), можно построить семейство этих линий.

Наряду с рассмотренными возможен способ *качественного* определения структуры магнитного поля *по уже известной структуре электрического поля*, который весьма удобен при изучении полей в силу его простоты и позволяет лучше уяснить взаимосвязь полей.

Согласно одному из основных уравнений электромагнитного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.75)$$

вектор скорости изменения электрической индукции во времени $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ определяет магнитное поле $\mathbf{H}$ в той же мере, что и вектор плотности тока проводимости $\mathbf{j}$. Вектору скорости изменения электрической индукции присваивается, как известно, специальное наименование — вектора плотности тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.76)$$

В соответствии с уравнениями (2.75) и (2.76) магнитное поле тока смещения может быть определено по правилам, выведенным

для тока проводимости, что будет часто использоваться в дальнейшем. Используя эти правила, необходимо иметь в виду существенные различия токов проводимости и токов смещения. Не совсем точное наименование «ток смещения» отражает лишь тот объективный закон, что *переменное электрическое поле вызывает магнитное*, подобно токам проводимости. При этом следует всегда помнить, что, в отличие от тока проводимости, *ток смещения в пустоте не связан ни в коей мере с движением или смещением каких-либо электрических зарядов*.

Это не мешает, однако, положить изучение картины распределения токов смещения в основу исследования картины распределения магнитного поля.

В рассматриваемом случае электрическое поле распределено вдоль оси z по закону бегущей волны

$$E_x = E'_x(y) e^{i(\omega t - \alpha z)}.$$

Распределение плотности тока смещения определяется тогда выражением

$$(j_{см})_x = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = i \omega \varepsilon E'_x(y) e^{i(\omega t - \alpha z)}$$

или

$$\begin{aligned} (j_{см})_x &= \omega \varepsilon E'_x(y) e^{i\left(\omega t - \alpha z + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \omega \varepsilon E'_x(y) e^{i\left[\omega t - \alpha\left(z - \frac{\lambda_g}{4}\right)\right]}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Таким образом, картина распределения плотности тока смещения повторяет картину распределения электрического поля со сдвигом в пространстве на четверть волны в волноводе в сторону распространения.

Последнее можно пояснить также следующим образом. При движении волны вдоль оси z максимальная скорость изменения поля во времени имеет место не в точках, где значения поля максимальны, а в точках, где значения поля равны нулю. Это иллюстрируется рис. 2.14, на котором показаны кривые распределения составляющей поля E_x вдоль оси z для двух смежных моментов времени t и $t + \Delta t$ (рис. 2.14а), и кривая распределения частной производной $\frac{\partial E_x}{\partial t}$ (рис. 2.14б), сдвинутая, как видно из рисунка, на $\frac{\lambda_g}{4}$ относительно первой кривой.

Сдвиг на $\frac{\lambda_g}{4}$ объясняется, наконец, и тем, что ток смещения, как ток ёмкостного характера, опережает напряжённость электрического поля во времени на четверть периода. Поэтому бегущая волна тока смещения опережает волну электрического поля, так

что максимумы этих волн смещены в пространстве на четверть длины волны, распространяющейся вдоль плоскостей.

Приведённые соображения позволяют *строить картину токов смещения бегущей волны как сдвинутую картину электрического*

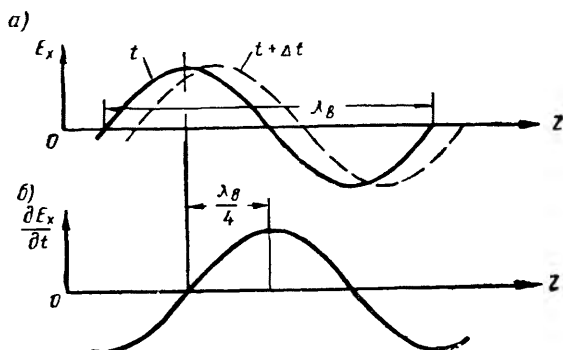


Рис. 2.14. Пояснение пространственного сдвига бегущих волн электрического поля и тока смещения

поля. Пользуясь этой картиной, нетрудно нанести *примерное распределение линий магнитного поля*. Линии магнитного поля представляют собой замкнутые кривые, окружающие *жгуты* линий

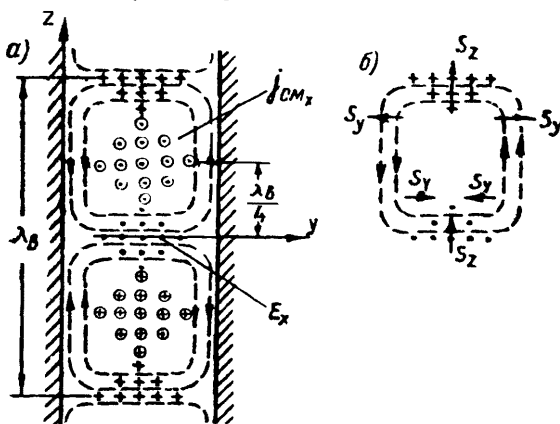


Рис. 2.15. Проекция линий электрического поля, тока смещения и магнитного поля на плоскость yoz (а) и векторы Умова—Пойнтинга (б) для фиксированного t

тока смещения. Их направление можно определить по направлению тока смещения, пользуясь правилом буравчика. Для волны H_1 такое построение показано на рис. 2.15а.

Поскольку линии магнитного поля окружают линии токов сме-

щения, плоскости $z = \text{const}$, соответствующие максимальной интенсивности поперечной составляющей электрического поля E_x , являются одновременно плоскостями максимума поперечной составляющей магнитного поля H_y . Направления этих составляющих изменяются одновременно.

Благодаря этому, продольная составляющая вектора плотности потока энергии

$$S_z = E_x H_y \quad (2.78)$$

всё время направлена в сторону положительных z (рис. 2.15б), а волновое сопротивление ρ_H активно.

Наличие продольной составляющей H_z определяет существование наряду с продольной его составляющей S_z поперечной составляющей вектора плотности потока энергии

$$S_y = -E_x H_z.$$

Поскольку составляющие поля E_x и H_z сдвинуты по фазе на 90° , составляющая S_y вектора плотности потока энергии всё время меняет знак, что связано с существованием стоячей волны вдоль оси y ¹⁾. Энергия накапливается в центре сечения, когда при движении волны там создаётся максимум поля (поперечного электрического и поперечного магнитного). Далее энергия смещается вдоль направления распространения и частично расходится к стенкам (что связано с образованием максимума продольного магнитного поля).

Поверхностные токи на плоскостях определяются из известного граничного условия

$$\mathbf{j}_s = [\mathbf{n} \mathbf{H}_\tau].$$

Для волны H тангенциальной составляющей магнитного поля является продольная составляющая этого поля H_z . В соответствии с написанным выражением вектор плотности поверхностного тока (рис. 2.16) располагается в поперечной плоскости. Поэтому, в отличие от поля TEM , поверхностные токи протекают не вдоль, а поперёк направления распространения, причём на обеих плоскостях они одинаково направлены в любом поперечном сечении.

На примере изученного поля можно убедиться, что перенос энергии не связан с протеканием токов в направлении распространения волны. По этому поводу уместно подчеркнуть, что *энергия переносится полем, а не токами*; токи же наводятся на проводящих поверхностях в соответствии со структурой поля и в общем

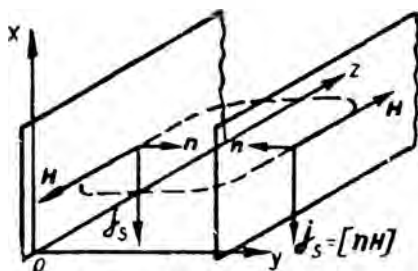


Рис. 2.16. Поверхностные токи при волне H_1

¹⁾ Следует оговорить, что точный сдвиг по фазе E_x и H_z на 90° и образование чисто стоячей волны вдоль оси y имеют место лишь при пренебрежении потерями в стенках.

случае могут не иметь составляющей, направленной в сторону переноса энергии. С примерами этого мы неоднократно встретимся в дальнейшем.

Приведённые до сих пор рассуждения относились к волне H_1 . Для волны H_2 , когда вдоль оси y укладываются две стоячие полу-волны, распределение поля в плоскости $zoу$ показано на рис. 2.17.

От случаев $n=1$ и $n=2$ можно легко перейти к случаю произвольного n .

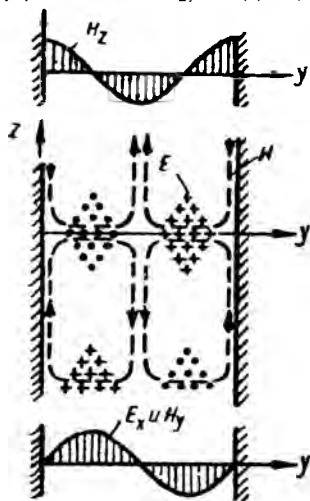


Рис. 2.17. Структура поля волны H_2

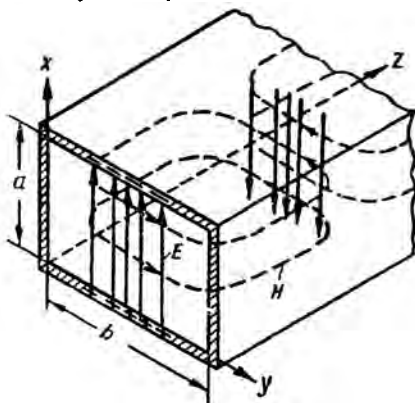


Рис. 2.18. Переход к волне H_{01} в прямоугольном волновом волновом

Если перпендикулярно рассматриваемым плоскостям поставить ещё две плоскости, идущие в направлении распространения, мы перейдём к *прямоугольному волновому* (рис. 2.18). Вновь поставленные плоскости не нарушат структуры поля, поскольку они нормальны к линиям электрического и касательны к линиям магнитного полей. Показанная на рис. 2.18 волна называется волной H_{01} в прямоугольном волновом волновом. Обозначение поля H характеризует, как и ранее, поперечный характер электрического и наличие продольной составляющей магнитного поля. Индекс 1 свидетельствует о том, что вдоль оси y укладывается одна стоячая полу-волна поля. Индекс 0 показывает, что вдоль оси x укладывается нуль стоячих полу-волн, т. е. что поле вдоль оси x является однородным. Волны H_n между параллельными плоскостями можно рассматривать, как *предельный случай* волн H_{0n} в *прямоугольном волновом волновом* (рис. 2.18), когда размер a последнего безгранично увеличивается.

§ 2.10. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ И СКОРОСТЬ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ВОЛН ТИПА H

Фазовой скоростью, как известно, называют скорость движения какой-либо заданной фазы в направлении распространения.

Чтобы пояснить определение фазовой скорости и вывести расчётное соотношение, рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси z (рис. 2.19), волновой множитель которой имеет вид $e^{i(\omega t - \alpha z)}$. Распределение поля вдоль оси z в момент времени t показано на рисунке сплошной линией, а распределение поля в момент времени $t + \Delta t$ — пунктиром. Для вычисления фазовой скорости, согласно её определению, концентрируем внимание на

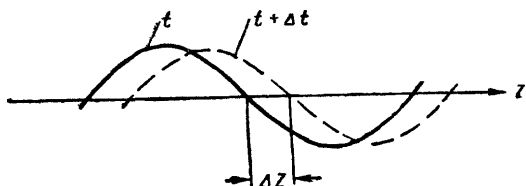


Рис. 2.19. Пояснение понятия фазовой скорости

некоторой определённой фазе колебаний, например фазе колебаний π (рис. 2.19). Выясним, на какое расстояние Δz смещается эта фаза за время Δt . По определению

$$v_{\phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (2.79)$$

Из условия постоянства фазы, движение которой исследуется, имеем:

$$\begin{aligned} \omega t - \alpha z &= \varphi_0, \\ \omega(t + \Delta t) - \alpha(z + \Delta z) &= \varphi_0. \end{aligned}$$

Вычитая из нижнего равенства верхнее, получим

$$\omega \Delta t - \alpha \Delta z = 0,$$

откуда

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (2.80)$$

Найденное соотношение показывает, что при заданной частоте ω величина фазовой скорости определяется фазовой постоянной α .

Скорость переноса энергии вводится по аналогии со скоростью движения жидкости в гидродинамике. Известно, что произведение количества жидкости $W_{ж}$, приходящегося на единицу длины трубы или канала, на скорость движения жидкости $v_{ж}$ даёт количество жидкости $P_{ж}$, переносимое через поперечное сечение в единицу времени,

$$W_{ж} v_{ж} = P_{ж},$$

откуда $v_{ж}$ находится, как отношение

$$v_{ж} = \frac{P_{ж}}{W_{ж}}.$$

По аналогии, скоростью переноса энергии v_{ε} можно назвать отношение средней переносимой через поперечное сечение мощности P к среднему значению энергии W , приходящемуся на единицу длины в направлении распространения,

$$v_{\varepsilon} = \frac{P}{W}. \quad (2.81)$$

В силу однородного распределения поля вдоль оси x величины P и W могут быть рассчитаны для произвольного участка, шириной a вдоль этой оси (рис. 2.20).

Подставляя в ф-лу (2.80) выражение (2.66) для фазовой постоянной волн типа H , найдём фазовую скорость

$$v_{\phi} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{кр}^2}}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}}. \quad (2.82)$$

Чтобы рассчитать скорость переноса энергии для волн типа H , пользуясь соотношениями (2.71), (2.72), (2.73), (2.69), (2.61) и (2.68), следует найти:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^b E_x H_y dy a = \frac{E_{xm}^2}{4 \rho_H} ab;$$

$$W_{\varepsilon} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^b \frac{\varepsilon E_x^2}{2} dy a = \frac{\varepsilon E_{xm}^2}{8} ab;$$

$$\begin{aligned} W_M &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^b \left(\frac{\mu H_y^2}{2} + \frac{\mu H_z^2}{2} \right) dy a = \frac{\mu}{8} \frac{E_{xm}^2}{\rho_H^2} \left(1 + \frac{n^2 \lambda_{\theta}^2}{4b^2} \right) ab = \\ &= \frac{\varepsilon E_{xm}^2}{8} \frac{\lambda^2}{\lambda_{\theta}^2} \left(1 + \frac{\lambda_{\theta}^2}{\lambda_{кр}^2} \right) ab = \frac{\varepsilon E_{xm}^2}{8} \left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2} \right) + \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2} \right] ab = \frac{\varepsilon E_{xm}^2}{8} ab; \end{aligned}$$

$$W = W_{\varepsilon} + W_M = \frac{\varepsilon E_{xm}^2}{8} ab + \frac{\varepsilon E_{xm}^2}{8} ab = \frac{\varepsilon E_{xm}^2}{4} ab.$$

Расчёт скорости переноса энергии по ф-ле (2.81) с учётом соотношения (2.69) даёт

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon \rho_H} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \frac{\lambda_{\theta}}{\lambda} = v \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}. \quad (2.83)$$

Из соотношений (2.82) и (2.83) вытекает, что фазовая скорость больше скорости света v , скорость переноса энергии меньше v , а их произведение равно квадрату скорости света в диэлектрике

$$v_{\phi} \cdot v_g = v^2. \quad (2.84)$$

Зависимости v_{ϕ} и v_g от частоты представлены графически на рис. 2.21. Для сравнения на этом же рисунке показана зависимость постоянной распространения α от частоты.

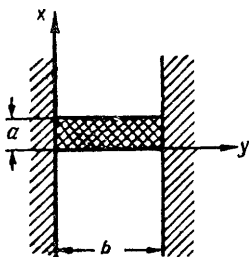


Рис. 2.20. Пояснение понятия скорости переноса энергии

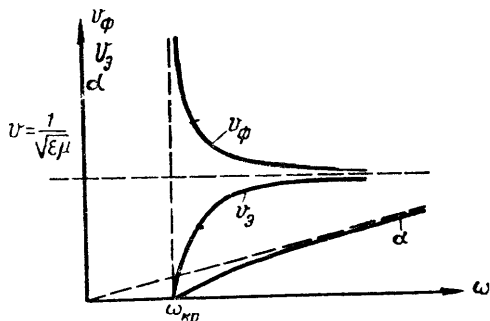


Рис. 2.21. График зависимости скоростей распространения v_{ϕ} и v_g и фазовой постоянной α от частоты

Существование зависимости фазовой скорости от частоты называется *дисперсией*. Волны, для которых дисперсия имеет место, называют *диспергирующими волнами*. Волны H (как и волны типа E) — диспергирующие. Волны типа TEM (при отсутствии дисперсии самой диэлектрической среды) — недиспергирующие. Фазовая скорость этих волн равно, как и скорость переноса энергии, не зависит от частоты и равна скорости света в данной среде, в чём нетрудно убедиться, используя полученные формулы.

Как следует из графика рис. 2.21 и соотношения (2.82), фазовая скорость v_{ϕ} диспергирующей волны H всегда больше скорости света и резко возрастает по мере приближения ω к $\omega_{кр}$. Последнее соответствует тому, что длина волны в волноводе λ_g в этом случае больше, чем длина волны в свободном пространстве, ибо

$$\lambda_g = v_{\phi} T,$$

а

$$\lambda = v T,$$

где T — период высокочастотных колебаний.

Вывод о том, что фазовая скорость больше, чем скорость света, не противоречит положениям современной физики, согласно которым скорости перемещения частиц, передачи сигнала и переноса энергии не могут превышать скорость света c в пустоте.

Дело в том, что фазовая скорость не характеризует ни одного из указанных процессов, а *описывает лишь закон движения картины поля для установившегося режима*, причём сама эта картина *устанавливается* во времени в результате *интерференции* более простых волн. Более подробно интерференционный характер поля (зная который, можно дополнительно пояснить понятия фазовой скорости и скорости переноса энергии) рассматривается в §§ 2.11 и 2.14.

§ 2.11. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ВОЛНЫ ТИПА H НА ОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Воспользуемся выражением (2.71) для электрического поля распространяющейся волны типа H , которое запишем в виде

$$E_x = E_{xm} \sin ky \cos(\omega t - \alpha z). \quad (2.85)$$

Это выражение показывает, что волна типа H является *плоской*, так как для каждого фиксированного t уравнение поверхностей равных фаз

$$\omega t - \alpha z = \text{const}$$

есть уравнение плоскости ($z = \text{const}$). Волна типа H является *неоднородной*, поскольку амплитуды поля неодинаковы в пределах поверхности равных фаз, так как они зависят от координаты y .

Итак, волна типа H является *неоднородной плоской волной*.

Исследуя свойства неоднородных плоских волн, описываемых соотношением (2.85), мы отвлечёмся пока от граничных поверхностей, полагая, например, что подобная волна возбуждена в свободном пространстве.

Произведя тригонометрические преобразования выражения (2.85), получим

$$E_x = \frac{E_{xm}}{2} [\sin(\omega t - \alpha z + ky) - \sin(\omega t - \alpha z - ky)].$$

Это значит, что

$$E_x = E_{x1} + E_{x2}, \quad (2.86)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_{x1} &= \frac{E_{xm}}{2} \sin(\omega t - \alpha z + ky) \\ E_{x2} &= \frac{E_{xm}}{2} \sin(\omega t - \alpha z - ky + \pi) \end{aligned} \right\}. \quad (2.87)$$

Как видно из соотношений (2.86) и (2.87), *неоднородная плоская волна разбивается на две более простые элементарные*

волны. Каждая из элементарных волн является *однородной*, поскольку её амплитуда не зависит от координат x , y и z , что непосредственно следует из соотношений (2.87). Каждая элементарная волна является *плоской*, поскольку поверхностями равных фаз являются плоскости.

Чтобы убедиться в этом, напишем уравнение поверхности равных фаз (фазового фронта) для первой из волн. Задаваясь каким-либо постоянным значением фазы φ_1 , получим

$$\omega t - \alpha z + ky = \varphi_1.$$

Для какого-либо фиксированного момента времени t_1 имеем уравнение плоскости

$$\alpha z - ky = \omega t_1 - \varphi_1. \quad (2.88)$$

Подобное же уравнение для фронта второй волны можно записать так

$$\alpha z + ky = \omega t_1 - \varphi_2. \quad (2.89)$$

Плоскости равных фаз, соответствующие каждому из уравнений (2.88) и (2.89), параллельны между собой, параллельны оси x и перпендикулярны направлению распространения. На рис. 2.22а представлены следы плоскостей равных фаз в плоскости чертежа $zoу$. Сплошными линиями показаны следы плоскостей равных фаз, соответствующих максимальным положительным значениям поля или «горбам» каждой из волн ($\sin \varphi = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi\nu$, где $\nu = 0, \pm 1, \dots$). Штриховыми линиями показаны следы плоскостей равных фаз, соответствующих максимальным отрицательным значениям или «впадинам» волн ($\sin \varphi = -1$, $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\nu$).

Каждая из элементарных волн распространяется под некоторым углом θ к оси z симметрично по отношению ко второй волне. С течением времени плоскости равных фаз перемещаются в направлении распространения параллельно самим себе.

По отношению к элементарным волнам применимы закономерности, известные для плоских однородных волн в свободном пространстве:

1) скорость распространения элементарной волны равна скорости света $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, а длина волны, измеренная вдоль направления распространения (оси r_1 и r_2), — длине волны в свободном пространстве;

2) каждая из элементарных волн является поперечной электромагнитной волной, т. е. не имеет составляющих поля в направлении распространения.

На рис. 2.22а направления линий электрического поля показаны точками в «горбах» (линии идут перпендикулярно плоскостям

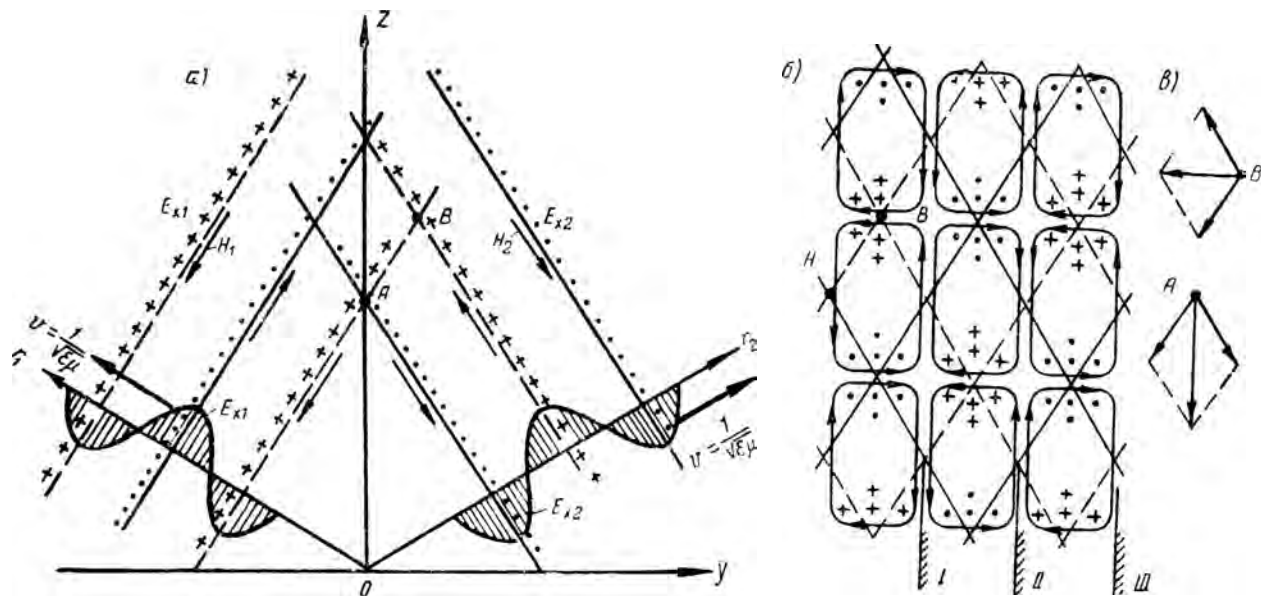


Рис. 2.22. Поля элементарных плоских волн и структура интерференционной картины поля волны типа H

ти чертежа на читателя), крестами — во «впадинах» (линии идут перпендикулярно плоскости чертежа от читателя). Стрелками показано направление линий магнитного поля, которые располагаются в плоскости фазового фронта перпендикулярно линиям электрического поля. Направления их определяются из условия переноса энергии в сторону движения волны¹⁾).

Суммарное поле двух плоских однородных волн в свободном пространстве даёт плоскую неоднородную волну, представленную на рис. 2.22б. При наложении «горба» одной из волн и «впадины» другой суммарное электрическое поле обращается в нуль (точка А, рис. 2.22а и б), векторы магнитного поля, складываясь геометрически (рис. 2.22в), дают суммарный вектор, параллельный оси z . При наложении «впадины» и «впадины» (точка В на рис. 2.22а и б) получается электрическое поле удвоенной амплитуды по сравнению с каждой из элементарных волн в отрицательном направлении оси x (кресты на рис. 2.22б); векторы магнитного поля дают суммарный вектор (рис. 2.22в), параллельный оси y . При наложении двух «горбов» получается суммарный «горб» электрического поля (точки) и т. д. Линии магнитного поля, построенные как огибающие соответствующих векторов, имеют замкнутый характер.

Наблюдая интерференционную картину поля, можно заметить, что существуют такие плоскости, в которых отсутствует составляющая электрического поля E_x . Магнитные силовые линии идут тангенциально к этим плоскостям. По характеру электрического поля назовём эти плоскости *узловыми*. Следы узловых плоскостей I, II и III, перпендикулярных к поверхности чертежа, показаны на рис. 2.22б.

Если поставить вдоль узловых плоскостей идеально проводящие бесконечно тонкие пластины, картина поля не будет нарушена, поскольку будут соблюдены граничные условия на поверхности пластин. Поставив идеально проводящие пластины вдоль узловых плоскостей I и II, придём к структуре поля H_1 между плоскостями. Поставив же пластины вдоль плоскостей I и III, приходим к структуре поля волны H_2 и т. д. Таким образом, исследуя интерференционное поле двух плоских однородных волн в свободном пространстве, можно изучить структуру поля произвольной волны H_n между параллельными плоскостями.

Представленная на рис. 2.22б интерференционная картина поля построена для некоторого момента времени t . С течением времени, когда фронт каждой из однородных волн смещается параллельно самому себе, картина суммарного поля движется вдоль оси z как единое целое, не нарушая своей структуры, с фазовой скоростью v_ϕ .

Исходя из разложения плоской неоднородной волны на плоские однородные, нетрудно пояснить тот факт, что $v_\phi > v$, а $v_g < v$.

¹⁾ Если изменить направления магнитных линий на обратные, должно измениться направление переноса энергии.

На рис. 2.23а показаны следы поверхностей равных фаз, соответствующие «горбам» элементарных волн для моментов времени t и $t + \Delta t$. За время Δt поверхность равных фаз каждой из волн перемещается на расстояние $AB = AC = v \Delta t$, где v — скорость све-

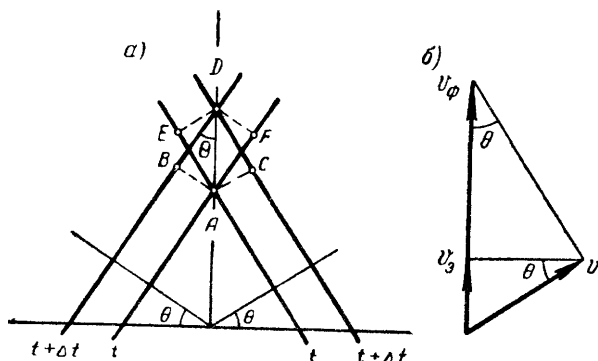


Рис. 2.23. Пояснение соотношений между v , v_ϕ , v_z

та. Смещение же горба интерференционной картины происходит на большее расстояние $AD = v_\phi \Delta t$, соответствующее скорости $v_\phi > v^1$). Из $\triangle ADB$ получим

$$\frac{v_\phi}{v} = \frac{v_\phi \Delta t}{v \Delta t} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sin \theta}. \quad (2.90)$$

Тогда

$$v_z = \frac{v^2}{v_\phi} = v \sin \theta. \quad (2.91)$$

Найденные соотношения приводят к векторной диаграмме скоростей (рис. 2.23б). Таким образом, скорость переноса энергии v_z плоской неоднородной волны представляет собой *проекцию вектора скорости плоской однородной волны v на направление распространения неоднородной*. Последнее следует непосредственно из того, что перенос энергии каждой из элементарных волн происходит в среднем *независимо* от другой элементарной волны. При одной и той же объёмной плотности энергии плотность потока энергии элементарной волны в направлении оси z пропорциональна $\sin \theta$, что по определению v_z и приводит к зависимости (2.91).

Возвращаясь к рис. 2.22б, предположим, что в узловой плоскости электрического поля расположена пока только одна идеально проводящая пластина. Суммарное поле по одну сторону плас-

¹⁾ Стоит ещё раз подчеркнуть, что это смещение не является смещением энергии. Из окрестности точки A энергия поступает к точкам B и C поперечной плоскости BC . К точке же D энергия поступает из окрестности точек E и F совсем другой поперечной плоскости EF .

тины можно рассматривать как результат отражения плоской однородной волны от пластины и интерференции падающей и отражённой волн. На рис. 2.24а показаны направления распространения этих волн (штрих-пунктир), фронта волн, соответствующие горбам и впадинам (сплошные линии и штриховые соответственно). Если затем в следующей узловой плоскости поставить ещё одну проводящую пластину, можно говорить о волне, падающей на эту пластину, и волне, отражённой от неё. В результате, процесс распространения неоднородной волны между двумя проводящими пластинами можно рассматривать как результат последовательных отражений плоской однородной волны, падающей под некоторым определённым углом к пластинам (рис. 2.24б).

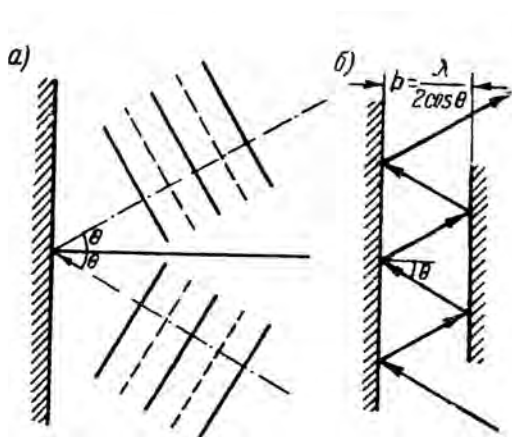


Рис. 2.24. Отражение плоской однородной волны от идеально проводящей плоскости (а); образование волны H в результате последовательных отражений (б)

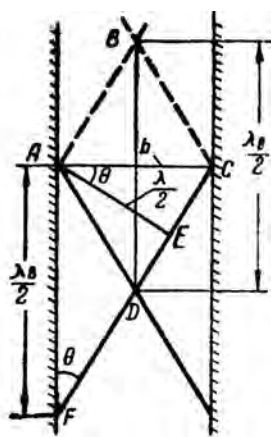


Рис. 2.25. Пояснение соотношений между θ , λ , b и λ

Угол θ может быть произвольным только в том случае, если расстояние b между плоскостями подбирается в соответствии с интерференционной картиной поля в зависимости от θ и λ . Если же интерференционная картина установилась при заданном b , соответствующий ей угол θ определяется как функция λ и b . На рис. 2.25 выделен участок интерференционной картины (рис. 2.22б) между двумя смежными узловыми плоскостями и для некоторого момента времени показаны поверхности равных фаз, соответствующие «горбам» и «впадинам». В треугольнике AEC , применительно к волне H_1 , расстояние $AC = b$. Расстояние AE между «горбом» и «впадиной» элементарной волны составляет половину длины волны в свободном пространстве, т. е. $AE = \lambda/2$. Из треугольника AEC находим

$$\cos \theta = \frac{AE}{AC} = \frac{\lambda}{2b}. \quad (2.92)$$

Полученная зависимость Θ от λ и b имеет смысл при $\lambda \leq 2b$. Критический случай $\lambda = 2b$ соответствует $\Theta = 0$, когда поверхности равных фаз элементарных волн идут параллельно граничным плоскостям, что соответствует колебаниям энергии между плоскостями без переноса вдоль оси z .

Если, пользуясь соотношением (2.92) найти $\sin \Theta = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta}$ и подставить в ф-лы (2.90) и (2.91) для v_ϕ и v_s , последние примут уже известную форму (2.82) и (2.83). При этом одновременно поясняется связь между λ_s и λ .

Пользуясь рис. 2.25, можно непосредственно убедиться в справедливости соотношения (2.68), связывающего λ_s и λ : $BD = AF = = \lambda_s/2$ — расстояние между «горбом» и «впадиной» в направлении распространения интерференционной картины, $AE = \lambda/2$ — расстояние между «горбом» и «впадиной» в направлении распространения элементарной волны. Из треугольника AEF находим

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} = \frac{AF}{AE} = \frac{1}{\sin \Theta}, \quad (2.93)$$

что с учётом (2.92) приводит к соотношению (2.68).

§ 2.12. ВОЛНЫ ТИПА E МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Используя результат предыдущего параграфа, изучение волн типа E можно начать с интерференционной картины поля двух плоских однородных волн в свободном пространстве (рис. 2.26а).

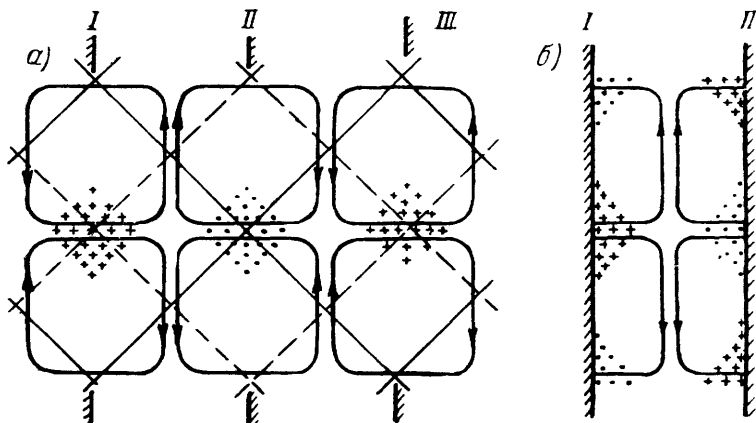


Рис. 2.26. Интерференционная картина поля для волны типа E

Она двойственна рассмотренной ранее (рис. 2.22б) и отличается лишь тем, что вектор магнитного (а не электрического поля) каждой из элементарных волн перпендикулярен плоскости чертежа.

По сравнению с предыдущей интерференционной картиной линии электрического и магнитного полей меняются местами. Направления линий согласуются с направлением распространения соответственно теореме Умова—Пойнтинга, как и в предыдущем случае.

К волнам типа E , распространяющимся между плоскостями, можно перейти, расположив в интерференционной картине (рис. 2.26а) пару идеально проводящих плоскостей, нормальных линиям электрического и касательных линиям магнитного полей. В зависимости от того, сколько структурных ячеек поля заключено между плоскостями, можно прийти к распространяющимся волнам E_1 (рис. 2.26б), E_2 и т. д.

Математические выражения для составляющих поля удобнее получить, решая дифференциальное уравнение¹⁾

$$\frac{d^2 E'_z}{dy^2} + k^2 E'_z = 0 \quad (2.94)$$

с учетом граничного условия $E'_z = 0$ ($y = 0$, $y = b$), которые получаются после замены $E_z = E'_z(y) e^{i\omega t - \gamma z}$ в соотношениях (2.17) и (2.27). Подставляя в решение уравнения (2.94)

$$E'_z(y) = A \cos ky + B \sin ky$$

значения $y = 0$ и $y = b$, находим, что $A = 0$, $k = \frac{n\pi}{b}$ и $E'_z(y) = B \sin ky$.

Анализ постоянного распространения $\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu$, проведенный в § 2.7, полностью распространяется на волны типа E между плоскостями. Сохраняются и выражения для α , β , λ_ϕ , v_ϕ , v_z , которые, как увидим далее, являются весьма общими и распространяются на волны E и H в волноводах произвольной формы сечения с идеально проводящими стенками. Отличие состоит лишь в конкретных выражениях для собственных чисел k и соответствующих им значений $\lambda_{kp} = 2\pi/k$. Однако для волн E и H между плоскостями с одинаковым номером n значения чисел k , а значит, и критических частот совпадают.

Используя найденные выражения для продольной составляющей и выражения (2.18), (2.19), формулы для составляющих поля можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= B \sin ky e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ E_y &= -\frac{i\alpha}{k} \cos ky e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ H_x &= -\frac{E_y}{\rho_E} \end{aligned} \right\}. \quad (2.95)$$

¹⁾ Их можно получить также непосредственно из интерференционной картины.

Здесь ρ_E — волновое сопротивление волны E , которое для распространяющейся волны будет

$$\rho_E = \frac{E_y}{-H_x} = \frac{\gamma}{i\omega\epsilon} = \frac{\alpha}{\omega\epsilon} = \rho_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}} = \rho_0 \frac{\lambda}{\lambda_s}. \quad (2.96)$$

Волновое сопротивление взято как отношение поперечных составляющих поля E_y и $-H_x$ (а не H_y), потому что при движении волны в положительном направлении составляющие E_y и H_x имеют разные знаки. Соотношение (2.96), как и ранее найденное соотношение для ρ_H (2.69), распространяется на все волноводы с идеально проводящими стенками, причём в случае совпадения критических частот можно написать

$$\rho_E \rho_H = \rho_0^2. \quad (2.97)$$

Характерным отличием поля (рис. 2.26а) от ранее изученных является наличие замкнутых линий электрического поля. Чаше встречаются замкнутые линии магнитного поля (для волн E и TEM в качестве исключения они «замыкаются» на бесконечности). Линии же электрического поля в ранее рассмотренных случаях начинались и кончались на зарядах, а для волн H безгранично простирались вдоль плоскостей. Между тем, возможность существования замкнутых линий электрического поля вытекает из уравнений электромагнитного поля в той же мере, что и замкнутых линий магнитного поля. Если за счёт изменения во времени вектора электрической индукции может создаваться вихревое магнитное поле, окружающее линии вектора $\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$, то за счёт изменения вектора магнитной индукции может создаваться вихревое электрическое поле, окружающее линии вектора $\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$. Замкнутые

линии электрического поля встречаются и в более «низкочастотных» устройствах. Под действием переменного магнитного поля, например, в витке, охватывающем сердечник трансформатора, создаётся ток (рис. 2.27а), а в кольцевой неоновой трубке (рис. 2.27б) начинается безэлектродный разряд, что является свидетельством существования *вихревого электрического поля*. Следует подчеркнуть, что поле в трубке появляется ещё до начала разряда, т. е. оно не обязательно связано с существованием тока проводимости. Замкнутые линии электрического поля характерны для ряда волноводных устройств.

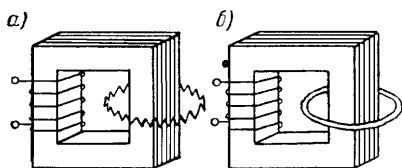


Рис. 2.27. Пример вихревого электрического поля

до начала разряда, т. е. оно не обязательно связано с существованием тока проводимости. Замкнутые линии электрического поля характерны для ряда волноводных устройств.

§ 2.13. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОЛЯ ПО ЗАДАННОМУ ТОКУ ВОЗБУДИТЕЛЯ

При изучении возможных решений ур-ний (2.6), (2.7), удовлетворяющих граничным условиям, до сих пор не ставился вопрос, как эти волны возбуждаются и как зависят амплитуды волн от параметров возбудителя. Рассмотрим этот вопрос на простейшем примере, когда поле между двумя идеально проводящими плоскостями возбуждается бесконечно тонкой лентой с током (рис. 2.28) конечной ширины δ , расположенной в поперечной плоскости $z=0$ параллельно оси x . В соответствии с одномерной постановкой задачи распределение тока вдоль оси x считается равномерным. Также равномерным считаем распределение тока по ширине ленты. Решение будем искать для установившегося режима синусоидальных колебаний, считая, что ток в проводе меняется по гармоническому закону $i = \dot{I}e^{i\omega t}$ и что каких-либо других волн между плоскостями, кроме волн, распространяющихся в обе стороны от возбудителя, нет (плоскости бесконечны, другие возбудители отсутствуют).

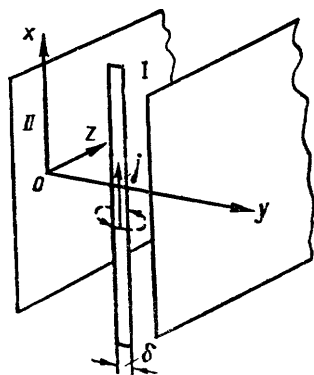


Рис. 2.28. К расчёту поля, возбуждаемого ленточным проводом

Поскольку справа (в области I) и слева (в области II) от возбудителя справедливы однородные уравнения Максвелла (2.8) и (2.9), т. е. уравнения без плотности тока в правой части, можно пользоваться частными решениями для волн типа H , E и TEM , удовлетворяющими граничным условиям на плоскостях. Общее решение для каждой из этих областей можно получить путём наложения соответствующих частных решений. Область, заполненная возбуждающим током и описываемая неоднородными уравнениями Максвелла, по условиям задачи стянута в плоскость $z=0$. Решение неоднородного уравнения заменяется поэтому подбором таких комбинаций частных решений для областей I и II , которые удовлетворяют граничным условиям на плоскости, определяемым заданным распределением плотности возбуждающего тока.

Выражения для составляющих магнитного поля в области I можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } H_{yI} &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}_{yn} \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma_n z} \\ \text{б) } H_{xI} &= \sum_{n=0}^{\infty} \dot{H}_{xn} \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma_n z} \end{aligned} \right\}, \quad (2.98)$$

где $\dot{H}_{yn}$ и $\dot{H}_{xn}$ — неизвестные ещё комплексные коэффициенты, при этом, согласно соотношениям (2.70), (2.95) и (2.35), составляющая H_y обусловлена налагающимися волнами H_n ($n = 1, 2, \dots$), а составляющая H_x — налагающимися волнами E_n ($n = 1, 2, \dots$) и TEM ($n = 0$). Составляющие H_y отдельных волн распределены по синусоидальному закону, составляющие H_x — по косинусоидальному, при $n = 0$ — распределение равномерно. Для постоянной распространения любой из волн можно написать

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}. \quad (2.99)$$

Применительно к области II в соотношениях (2.98) следует изменить знак в показателе степени перед γ_n . Амплитуды поля, в силу симметрии задачи, можно считать теми же, что и для области I. Однако направления линий магнитного поля при переходе через плоскость с током (рис. 2.28) меняются на противоположные¹⁾. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} a) H_{yII} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}_{yn} \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t + \gamma_n z} \\ б) H_{xII} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \dot{H}_{xn} \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t + \gamma_n z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.100)$$

Граничные условия при $z = 0$ можно записать в виде:

$$H_{yII} - H_{yI} = jS_x,$$

$$H_{xII} - H_{xI} = 0.$$

Подставляя сюда значения составляющих поля при $z = 0$ соответственно выражениям (2.98), (2.99), заменяя $jS_x = j_{Sx}(y) e^{i\omega t}$ и сокращая на общий множитель $e^{i\omega t}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} -2\dot{H}_{yn} \sin \frac{n\pi}{b} y &= j_{Sx}(y) \\ б) \sum_{n=0}^{\infty} -2\dot{H}_{xn} \cos \frac{n\pi}{b} y &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.101)$$

¹⁾ Можно было бы воспользоваться граничным условием $E_{xI} = E_{xII}$ при $z = 0$.

Закон распределения x -вой составляющей вектора плотности поверхностного тока определяется в соответствии с условиями задачи следующим образом:

$$j_{sx}(y) = \begin{cases} \frac{I}{\delta}, & \text{если } |y - y_1| < \frac{\delta}{2} \\ 0, & \text{если } |y - y_1| > \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

Здесь y_1 — координата центра провода.

Соотношения (2.101) представляют собой тригонометрические ряды Фурье, а неизвестные комплексные величины являются их коэффициентами. Последние можно определить, пользуясь свойством ортогональности тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{\nu\pi}{b} y dy &= 0, \text{ если } \nu \neq n, \\ \int_0^b \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{\nu\pi}{b} y dy &= 0, \text{ если } \nu \neq n, \end{aligned} \quad (2.102)$$

где n и ν — целые числа.

Для определения неизвестных коэффициентов достаточно умножить соотношение (2.101а) на $\sin \frac{\nu\pi}{b} y$, а соотношение (2.101б) на $\cos \frac{\nu\pi}{b} y$ (здесь ν — произвольное целое число) и проинтегрировать по координате y в промежутке между плоскостями. При этом все интегралы в левой части равенств, кроме интеграла с номером $n = \nu$, обращаются в нуль.

После интегрирования и замены ν на n получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } H_{yn} &= -\frac{1}{b} \int_0^b j_{sx}(y) \sin \frac{n\pi}{b} y dy \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \text{б) } H_{xn} &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\}. \quad (2.103)$$

Отсюда видно, что данный ленточный провод возбуждает волны H и не возбуждает волн E и TEM . Подставляя в (2.103а) вы-

ражение для плотности поверхностного тока $\dot{J}_{Sx}(y)$, найдём для различных видов волн H ($n=1,2,\dots$)

$$\begin{aligned}\dot{H}_{yn} &= -\frac{i}{b\delta} \int_{y_1 - \frac{\delta}{2}}^{y_1 + \frac{\delta}{2}} \sin \frac{n\pi}{b} y dy = \\ &= -\frac{i}{b} \frac{\sin \frac{n\pi\delta}{2b}}{\frac{n\pi\delta}{2b}} \sin \frac{n\pi}{b} y_1.\end{aligned}\quad (2.104)$$

Если в выражении (2.101а) обозначить $-2H_{yn} = \dot{J}_{Sn}$, то $\dot{J}_{Sn}$ следует интерпретировать как гармонику пространственного разложения (2.101а) поверхностного тока. При этом

$$\dot{H}_{yn} = -\frac{\dot{J}_{Sn}}{2}.\quad (2.105)$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Заданный закон распределения плотности тока $\dot{J}_{Sx}$ в плоскости $хоу$ представлен как результат наложения ряда синусоидальных распределений или, иначе, пространственных гармоник (рис. 2.29). Разложение импульсного распределения тока в ряд Фурье с математической точки зрения мало отличается от широко используемого в радиотехнике разложения несинусоидальных временных функций на гармонические функции времени. Но здесь разложение применено не для закона распределения во времени, а для закона распределения в пространстве. Таким образом, «пространственный», а не временной импульс (рис. 2.29а) разлагается на «пространственные» же гармоники (рис. 2.29б, в, г). Что касается закона изменения тока во времени, то он остаётся по-прежнему синусоидальным, с частотой колебаний ω , что соответствует установившемуся режиму гармонических колебаний. Разложение на пространственные гармоники дополнительно иллюстрируется на рис. 2.30, где заданное распределение тока и соответствующее ему распределение пространственных гармоник изображены при помощи векторных линий.

Как следует из соотношения (2.105), амплитуда поля возбуждаемой волны с номером n зависит только от интенсивности соответствующей пространственной гармоники тока. Это значит, что каждая пространственная гармоника тока возбуждает свой тип

волны, не возбуждая других типов волн. Если бы закон распределения плотности тока в сечении xoy совпадал с законом распределения какой-либо одной из гармоник, то в пространстве между плоскостями возбуждался бы только один из видов колебаний H . Например, при распределении возбуждающего тока,

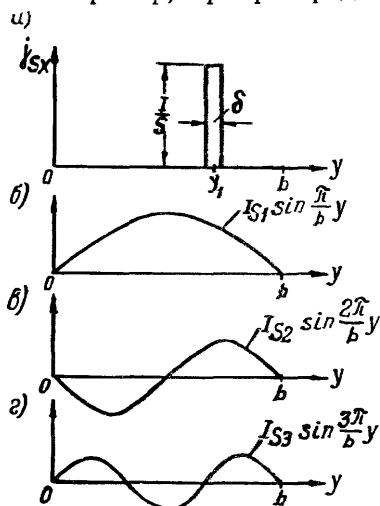


Рис. 2.29. Разложение функции распределения поверхностного тока на пространственные гармоники

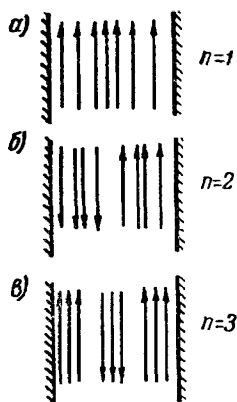


Рис. 2.30. Изображение пространственных гармоник поверхностного тока при помощи векторных линий

согласно рис. 2.30а, будет возбуждаться тип колебаний H_1 ; при распределении его, согласно рис. 2.30б, будет возбуждаться тип колебаний H_2 и т. д. При несинусоидальном же распределении возбуждающего тока в пространстве возбуждается *ряд типов колебаний*, каждый из которых характеризуется своей пространственной гармоникой распределения тока.

Амплитуда каждой пространственной гармоники определяется произведением двух множителей, зависящих от номера n .

Первый множитель $\sin \frac{n\pi b}{2b} / \frac{n\pi b}{2b}$ характерен для разложения последовательности прямоугольных импульсов в ряд Фурье и даёт при неизменном втором множителе в зависимости от номера n распределение интенсивности гармоник, показанное на рис. 2.31. Легко видеть, что представленный на рис. 2.31 спектр пространственных гармоник совпадает по своей конфигурации со спектром временных гармоник периодической последовательности прямоугольных импульсов. Как и в этом последнем случае, минимальное число гармоник, приближённо описывающих заданный характер распределения, можно характеризовать значением $n=n_0$, для которого огибающая пространственного спектра (рис. 2.31)

обращается в нуль. Полагая аргумент синуса равным π , находим это значение

$$n_0 \approx \frac{2b}{\delta}.$$

Найденное соотношение подобно хорошо известному соотношению для временных импульсов, согласно которому число гармоник определяется скважностью,

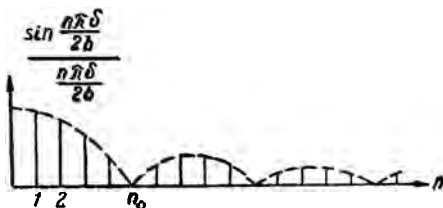


Рис. 2.31. Спектр пространственных гармоник (без учёта множителя, характеризующего положение провода)

т. е. отношению расстояния $2b$ к поперечному размеру провода δ . Чем тоньше провод, тем большее число видов волн нужно для описания поля вблизи провода.

Второй множитель в ф-ле (2.104) $\sin \frac{n\pi}{b} y_1$, который зависит

от положения возбуждающего провода, обычно не встречается при разложении временных функций на гармоники. Наличие его связано с тем, что пространственные гармоники удовлетворяют граничным условиям при $y=0$ и $y=b$.

Этот множитель показывает, что амплитуда соответствующей гармоники зависит от координаты y_1 , т. е. от положения возбуждающего провода с током относительно идеально проводящих плоскостей. Зависимость от координаты y_1 такая же, как и для закона распределения $\sin \frac{n\pi}{b} y$ составляющей поля соответствующего типа волны ($n=1,2,\dots$). Другими словами, интенсивность пространственной гармоники тока характеризуется значением множителя распределения электрического поля возбуждаемого типа волны в месте расположения провода.

Следовательно, провод с заданным током возбуждает наиболее интенсивное поле в том случае, если он расположен в пучности электрического поля возбуждаемого типа волны. Это значит, что наибольшее поле возбуждается при таком положении провода, для которого в режиме приёма наводится наибольшая эдс. Наоборот, если провод с током попадает в узлы распределения поля, соответствующие типы волн не возбуждаются. С этим следует связать и то, что данный провод не возбуждает волн TEM и E .

которые не наводят эдс в режиме приёма. На рис. 2.32 показаны оптимальные положения провода для волн H_1 и H_2 (сплошные линии) и положения, при которых не происходит возбуждения этих волн (штриховые линии). Вывод о том, что при заданном токе провода наиболее интенсивно возбуждаются волны, которые наводят наибольшую эдс, соответствует *теореме взаимности* и будет широко использован в дальнейшем.

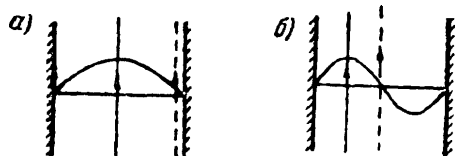


Рис. 2.32. Положения провода, соответствующие максимальной и нулевой интенсивности возбуждаемых полей: а) для колебаний H_1 ; б) для колебаний H_2

Если $b < \lambda < 2b$, в пространстве между плоскостями может распространяться в соответствии с выражением (2.99) только один тип волн: $\gamma_n = i\alpha$ при $n = 1$ и $\gamma_n = \beta_n$ при $n = 2, 3, \dots$, где значения вещественных постоянных α и β определяются указанным выражением. Тогда *вдали* от провода ($z \rightarrow \infty$ в области I и $z \rightarrow -\infty$ в области II) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{yI} &= -\frac{i}{b} \sin \frac{\pi}{b} y_1 \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ \dot{H}_{yII} &= \frac{i}{b} \sin \frac{\pi}{b} y_1 \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t + \alpha z)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.106)$$

С целью упрощения выражения написаны при $\delta \rightarrow 0$. Пользуясь более общими выражениями (2.98), можно оценить поле в любой точке пространства и при любой длине волны генератора.

Выше была определена только одна составляющая H_y возбуждаемого поля. Зная связь между составляющими, можно найти любую из них для каждого типа колебаний. Учитывая, например, что для первой области $\rho_H = \frac{i\omega\mu}{\gamma_n}$, а для второй, с противоположным направлением распространения, $\rho_H = -\frac{\omega\mu}{\gamma_n}$, можно написать для обеих областей

$$E_x = -i\omega\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \sin \frac{n\pi}{b} y_1 \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma_n |z|}. \quad (2.107)$$

С целью упрощения выражение написано при условии, что $\delta \rightarrow 0$; $|z|$ — модуль координаты z (модуль расстояния от поперечной плоскости, соответствующей точке наблюдения, до поперечной плоскости возбуждителя).

График (рис. 2.33), построенный на основе выражений (2.99), (2.107) после подстановки значений $\gamma_n = i\alpha_n$ (или $\gamma_n = \beta_n$) и перехода к реальной части, иллюстрирует «отпочковывание» от плоскости возбуждителя распространяющейся (рис. 2.33а, б) и нераспространяющейся (рис. 2.33в, г) волн. Для распространяющейся волны поперечные составляющие электрического и магнитного полей синфазны (изменение знака отношения $\frac{E_x}{H_y}$ связано лишь с

изменением направления переноса энергии), для нераспространяющейся волны — сдвиг фаз составляет 90° . В обоих случаях поперечная составляющая магнитного поля претерпевает разрыв непрерывности, а поперечная составляющая электрического поля не терпит разрыва при переходе через плоскость с током $z=0$

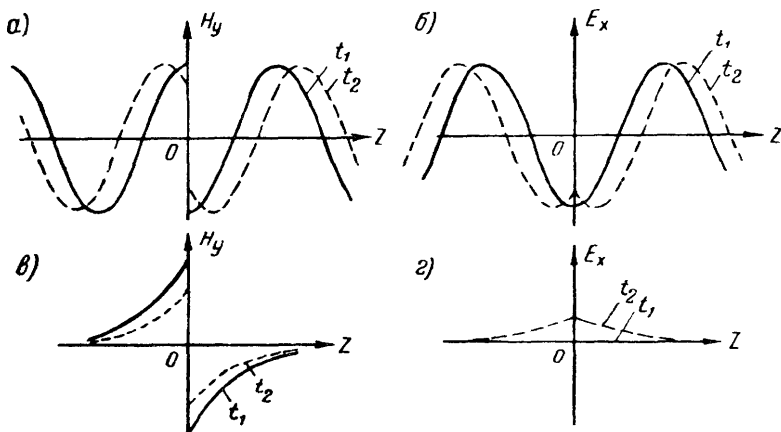


Рис. 2.33. Графики распределения поперечных составляющих вдоль оси z при возбуждении распространяющейся и нераспространяющейся волн

Найденные решения справедливы при произвольном соотношении длины волны λ и расстояния b между плоскостями, а особенности распределения поля вдоль направления распространения определяются значениями постоянных распространения (2.99). При больших номерах n постоянная распространения γ_n высших типов волн практически мало зависит от частоты. Поскольку для примерной характеристики поля у провода, в соответствии с рис. 2.31, приходится учитывать большое число видов колебаний, то местное поле у провода описывается в основном именно высшими видами волн, мало зависит от частоты и по своей конфигурации близко к статическому ($\omega=0$). Метод использования аналогии между местными полями переменных зарядов и токов и их статическими полями называется *квазистатическим*. Квазистатический метод связан с пренебрежением вторым членом в подкоренном выражении для постоянной распространения (2.99).

Перейдём к току, сосредоточенному на произвольной поперечной плоскости $z=z_1$ (а не $z=0$). Для этого достаточно в выражении (2.107) заменить $|z|$ на $|z-z_1|$

$$E_x = -i\omega\mu \frac{j}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \sin \frac{n\pi}{b} y_1 \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma_n |z-z_1|}. \quad (2.108)$$

Пользуясь выражением (2.108), можно распространить полученные результаты и на случай непрерывного распределения составляющей плотности тока j_x по координатам y_1, z_1 . Заменяя в (2.108) j на $j_x(y_1, z_1)$ и интегрируя в плоскости y, z по сечению возбудителя, можно получить

$$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{E}_{xn}(z) \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t}, \quad (2.109)$$

где

$$\dot{E}_{xn} = -\frac{i\omega\mu}{\gamma_n b} \iint j_x(y_1, z_1) \sin \frac{n\pi}{b} y_1 e^{-\gamma_n |z-z_1|} dy_1 dz_1. \quad (2.110)$$

Таким образом, от решений однородных уравнений Максвелла мы перешли к решениям неоднородных уравнений, справедливым как для области заполненной, так и для областей, незаполненных током.

Формулу (2.110) можно было бы получить непосредственно из неоднородных уравнений, задаваясь решением в форме (2.109). Обоснование такой формы решения ясно из проведённых рассуждений. Каждый элемент тока $j_x(y_1, z_1) dy_1 dz_1$ даёт в точке y_1, z_1 для n -го типа волны поле, распределённое по координате y по закону $\sin \frac{n\pi}{b} y$ и зависящее от разности $z - z_1$. Интерференция полей от всех элементов тока даёт очевидно поле, также распределённое по закону $\sin \frac{n\pi}{b} y$ и сложным образом зависящее от z , что и приводит к (2.109).

Существенной во всех проведённых выше рассуждениях была ортогональность функций распределения для волн TEM , H и E различных видов. В силу свойства ортогональности можно считать, что каждый из видов волн возбуждается независимо от другого вида соответствующей пространственной гармоникой тока. Ортогональность имеет место и в более общем случае волноводов произвольной формы сечения при идеальной проводимости стенок.

Существенна и полнота¹⁾ системы волн H, E, TEM . Применительно к проведённому решению, в частности, предполагалось, что произвольное распределение тока в поперечной плоскости можно разложить в ряд по соответствующим тригонометрическим функциям и что не может быть другого распределения в пределах $0 < y < b$, ортогонального ко всем функциям, встречающимся в разложении²⁾. Последнее строго доказывается, исходя из свойств тригонометрических функций.

§ 2.14. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Все предыдущие рассуждения справедливы для стационарного режима при распространении чисто гармонических колебаний. Явление дисперсии, т. е. зависимость фазовой скорости от частоты, рассмотренное ранее, сказывается существенно и при распространении негармонических колебаний.

Рассмотрим распространение простейшего модулированного колебания, которое для $z=0$ записывается в виде

$$E_0 = E_m (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t = E_m \cos \omega t + \frac{mE_m}{2} \cos(\omega + \Omega)t + \frac{mE_m}{2} \cos(\omega - \Omega)t. \quad (2.111)$$

¹⁾ С понятием замкнутости (полноты) системы функций можно познакомиться в курсах высшей математики (см. например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, изд. 9, стр. 448).

²⁾ Может возникнуть вопрос, не противоречит ли возможность разложения произвольно заданного распределения тока $j_{Sx}(y)$ (рис. 2.29) известному положению о том, что по синусам разлагаются заданные в пределах периода основной гармоники только нечётные функции. Противоречия не возникает, так как функция $j_{Sx}(y)$ задаётся в пределах полупериода основной гармоники и на второй полупериод её можно продолжить как нечётную, положив $j_{Sx}(y+b) = -j_{Sx}(y)$.

Поскольку к каждому из трёх гармонических колебаний, на которые разбивается модулированное колебание, применима изложенная ранее теория, то, пользуясь принципом суперпозиции, можно написать для произвольного z

$$E = E_m \cos(\omega t - \alpha_0 z) + \frac{mE_m}{2} \cos[(\omega + \Omega)t - \alpha_1 z] + \frac{mE_m}{2} \cos[(\omega - \Omega)t - \alpha_2 z], \quad (2.112)$$

где

$$\alpha_0 = \alpha(\omega), \quad \alpha_1 = \alpha(\omega + \Omega) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \alpha(\omega - \Omega)$$

— значения постоянной фазы для различных частот (считаем, что распространяется один тип колебаний).

Разлагая функцию $\alpha(\omega)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь тремя членами разложения, получим

$$\alpha(\omega \pm \Omega) = \alpha(\omega) \pm \frac{d\alpha}{d\omega} \Omega + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{d\omega^2} \Omega^2 = \alpha_0 \pm \kappa\Omega + \eta\Omega^2. \quad (2.113)$$

Тогда

$$\alpha z = \alpha_0 z \pm \kappa\Omega z + \eta\Omega^2 z.$$

Если $\delta = \eta\Omega^2 z \ll 1$, т. е. участок кривой $\alpha(\omega)$ (рис. 2.21) в пределах от $\omega - \Omega$ до $\omega + \Omega$ можно считать *линейным*, говорят, что колебания частот, соответствующих этому участку, образуют *группу колебаний*.

Выражение (2.112) можно тогда записать в виде

$$\begin{aligned} E &= E_m \left\{ \cos(\omega t - \alpha_0 z) + \frac{m}{2} \cos[(\omega + \Omega)t - (\alpha_0 + \kappa\Omega)z] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{2} \cos[(\omega - \Omega)t - (\alpha_0 - \kappa\Omega)z] \right\} = \\ &= E_m [1 + m \cos \Omega(t - \kappa z)] \cos(\omega t - \alpha_0 z). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Согласно полученному выражению для фиксированного момента времени вдоль оси z создаётся распределение поля, показанное на рис. 2.34. Распределение *фаз* высокочастотных колебаний соответствует постоянной α_0 для несущей частоты. Это значит, что расстояние между соседними сечениями z , в которых $E = 0$, будет равно $\frac{\lambda_g}{2} = \frac{\pi}{\alpha_0}$. Соответствующая фаза высокочастотных колебаний перемещается со скоростью $v_\phi = \frac{\omega}{\alpha_0}$. Амплитуды высокочастотных колебаний распределены вдоль оси z по закону

$$E_m [1 + m \cos \Omega(t - \kappa z)], \quad (2.115)$$

который можно иначе назвать *законом распределения огибающей амплитуд*. Согласно выражению (2.115), с течением времени огибающая сдвигается вдоль оси z , *не изменяя своей формы*, что связано со сделанным пренебрежением в выражении (2.113).

Скорость перемещения огибающей (рис. 2.34) группы синусоидальных колебаний называют групповой скоростью. Чтобы найти эту скорость, достаточно проследить за движением фиксированного значения амплитуды колебаний, полагая

$$t - \kappa z = \text{const},$$

откуда следует, что

$$\Delta t - \kappa \Delta z = 0$$

и

$$v_{gp} = \lim \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{d\omega}}. \quad (2.116)$$

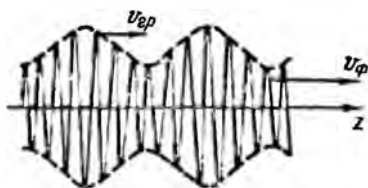


Рис. 2.34. Пояснение понятия групповой скорости

Поскольку групповая скорость отличается от фазовой, то огибающая модулированного колебания движется, вообще говоря, с иной скоростью, чем фаза (рис. 2.34), т. е. происходит своеобразное «проскальзывание» высокочастотного «заполнения» относительно огибающей. Сложное распределение поля (рис. 2.34) представляет собой *результат интерференции трёх гармонических волн, имеющих несколько отличающиеся фазовые скорости*¹⁾. Выражение (2.116) имеет весьма общее значение.

Используя выражение (2.66) для фазовой постоянной α волн H и E , получим

$$v_{gp} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{кр}}{v}\right)^2}} = v \sqrt{1 - \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2}}. \quad (2.117)$$

Как видно из полученного соотношения, групповая скорость неоднородных волн H и E меньше скорости света и совпадает со скоростью переноса энергии

$$v_{gp} = \frac{v^2}{v_\phi} = v_\epsilon. \quad (2.118)$$

Для недиспергирующей волны $ТЕМ$ скорости v , v_{gp} , v_ϕ и v_ϵ совпадают.

Если выражения для модулированных колебаний взять не в виде (2.111), а в более общей форме рядов или интегралов Фурье,

¹⁾ Каждую из гармонических *неоднородных* волн H или E можно, в свою очередь, считать результатом интерференции гармонических *однородных* волн.

то полученные результаты можно обобщить и на случай более сложных колебаний, но лишь в тех пределах, пока справедливо рассмотренное выше пренебрежение в ф-ле (2.113).

Может возникнуть вопрос, в какой мере справедливо пренебрежение в ф-ле (2.113), можно ли в действительности считать кривую $\alpha(\omega)$ линейной в пределах спектра модулированного колебания, не будет ли вследствие нелинейности «расползания» модулированных колебаний по мере перемещения их вдоль оси z . Используя выражение (2.116), условие линейности участка характеристики представим в виде

$$\delta = \eta \Omega^2 z = \frac{1}{2} \frac{d^2 \alpha}{d \omega^2} \Omega^2 z = \pi \frac{z}{\lambda} \left(\frac{v_{\phi}}{v} \right)^3 \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \ll 1.$$

Полагая

$$\frac{\Omega}{\omega} = 10^{-3}, \quad \frac{z}{\lambda} = 10^2 \quad \text{и} \quad \frac{v_{\phi}}{v} = 1,5,$$

убеждаемся, что величина δ не превосходит 10^{-3} рад, т. е. ею действительно можно пренебречь. Случай $\frac{\Omega}{\omega} = 10^{-3}$ соответствует модуляции микросекундными импульсами при несущей частоте в 1 Гц. Таким образом, *микросекундные импульсы в режиме бегущей волны обычно передаются без искажений, а для расчёта времени распространения импульсов можно пользоваться значением групповой скорости v_{gr} ¹⁾*.

В качестве характерного примера нестационарного режима рассмотрим образование волны H при включении тока в провод, расположенный между параллельными плоскостями. На рис. 2.35 показаны следы проводящих плоскостей в сечении плоскостью и сечение провода в виде точки M . Пусть в момент t начинает протекать ток $i = I_m \cos \omega t$, равномерно распределённый по длине провода. Постараемся качественно описать физические процессы при включении тока в возбуждающий провод.

Если исходить из решения, рассмотренного в § 2.13, то при условии $b < \lambda < 2b$ можно заключить, что в установившемся режиме вдали от провода имеют место колебания $TE_1 = H_1$. Поскольку спектр сосредоточен главным образом в окрестности несущей частоты ω , основная часть энергии сигнала доходит до точки наблюдения с групповой скоростью $v_{gr} = v_s$, соответствующей этой частоте. Детальное исследование процесса установления потребовало бы спектрального (или операционного) разложения тока провода $i(t)$ и использования результатов § 2.13 для отдельных спектральных составляющих.

¹⁾ При $\frac{\Omega}{\omega} \gg 10^{-3}$, $\frac{z}{\lambda} \gg 10^2$ (а также при $\omega \approx \omega_{кр}$, когда $\frac{v_{\phi}}{v} \rightarrow \infty$)

может наблюдаться явление «расползания» импульса.

Более наглядную картину установления колебаний можно составить, исходя из процесса *излучения цилиндрической волны* проводом и *последовательных отражений* этой волны идеально проводящими плоскостями.

Рисунок 2.35 относится к моменту времени, когда в точку N дошла прямая волна. Фронт, соответствующий «горбу» прямой волны, показан сплошной линией. Штриховые линии, проходящие через точку n , соответствуют фронтам — «впадинам» однократно отражённых волн. В промежутке между плоскостями можно считать, что они возбуждаются зеркальными изображениями I' и I'' возбуждающего провода относительно проводящих плоскостей,

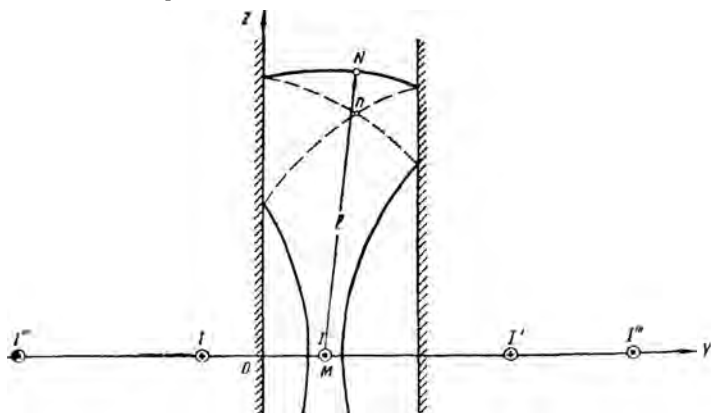


Рис. 2.35. Образование волны H при включении тока в провод

т. е. действие этих источников заменяет действие токов, наведённых на плоскостях первичной волной. Аналогично, можно считать, что фронты волн, получившихся при двукратном отражении, образованы излучением источников I''' (зеркальное изображение источника I' относительно правой плоскости) и I'''' (отражение источника I'' относительно левой плоскости). В соответствии с граничными условиями на проводящих плоскостях «горбы» накладываются на «впадины».

С течением времени образуется всё больше и больше отражённых волн, которые, налагаясь друг на друга в промежутке между плоскостями, дают в конце концов структуру поля, соответствующую установившемуся режиму. При $b < \lambda < 2b$ вдали от провода, как уже отмечалось выше, образуется волна H_1 . Иначе говоря, вдали от провода картина налагающихся цилиндрических волн переходит в картину наложения двух плоских волн, распространяющихся в направлениях, образующих угол $\theta = \arccos \frac{\lambda}{2b}$ с нормалью к плоскостям, т. е. в картину рис. 2.22. Описанный выше процесс свидетельствует, что разложение установившегося поля

на однородные плоские волны не является чисто математическим приёмом, а отражает интерференционные явления, имеющие место в процессе установления поля.

В какой-либо точке N установление поля во времени происходит следующим образом. Если расстояние этой точки от провода — l , то прямая волна доходит до точки N через $\frac{l}{v}$ после начала протекания тока, где v — скорость света. При большом l амплитуда прямой волны значительно меньше установившейся амплитуды и соответствует амплитуде в свободном пространстве (без учёта концентрации энергии плоскостями) на расстоянии l от провода. Первые отражённые волны не увеличивают амплитуды колебаний, так как приходят в противофазе к уже имеющемуся полю¹⁾. Лишь

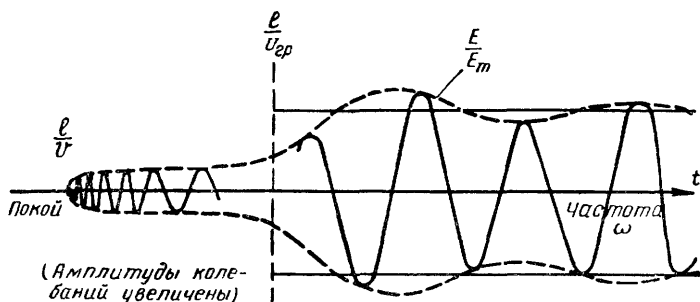


Рис. 2.36. График установления поля (не в масштабе)

когда в результате последовательных отражений образуется интерференционная картина (рис. 2.22), начинается быстрый рост поля. При этом волна, последовательно отражаясь от стенок, должна пройти до точки N не путь l , а больший путь, примерно $\frac{l}{\sin \theta}$, на что потребуется большее время $\frac{l}{v \sin \theta} = \frac{l}{v_{зр}} = \frac{l}{v_{з}}$, т. е. основная часть энергии доходит со скоростью $v_{зр}$ ($v_{з}$). Только когда картина поля окончательно установится, можно говорить о фазовой скорости $v_{ф}$, которая в силу интерференционного характера поля превышает скорость света v . Примерный характер нарастания поля (без соблюдения масштаба и детализации) показан на рис. 2.36.

¹⁾ При $l \gg b \gg \frac{\lambda}{2}$ (рис 2.35) расстояние $Nn \ll \frac{\lambda}{2}$. Если поле прямой волны в точке N равно E , то и в точке n его можно считать также равным E . Поскольку поле каждой из однократно отражённых волн в точке n равно $-E$, то суммарное поле будет $E - E - E = -E$. Таким образом, в точке n поле имеет практически то же значение, что и в точке N , но противоположный знак. Поскольку расстояние $Nn \ll \frac{\lambda}{2}$, время, за которое в точке N знак поля меняется на обратный в начале установления, значительно меньше полупериода колебаний в установившемся режиме (график рис. 2.36).

При $\lambda > 2b$, когда ни один из видов волн H не распространяется, интерферирующие прямая и отражённые волны складываются в таких фазовых соотношениях, что их поля на больших расстояниях от провода практически компенсируются.

§ 2.15. ВОЛНЫ МЕЖДУ НЕИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Чтобы учесть эффект неидеальной проводимости стенок, рассмотрим установившийся режим распространения волны типа H (рис. 2.37) между двумя бесконечными параллельными металлическими неидеально проводящими пластинами 1 и 2. На рисунке показано примерное распределение амплитуд продольной составляющей магнитного поля H_z вдоль оси y , перпендикулярной пластинам. В глубь металла амплитуда H_z резко убывает. Толщина пластин считается достаточно большой по сравнению с глубиной проникновения поля в металл.

Начнём со строгого решения граничной задачи, которое в рассматриваемом случае проводится сравнительно просто. Решения, как и ранее, будем искать в виде неоднородных волн (2.6) и (2.7). В пространстве между плоскостями они должны удовлетворять уравнениям Максвелла (2.8) и (2.9). Для толщи проводящих пластин ур-ние (2.9) заменяется на

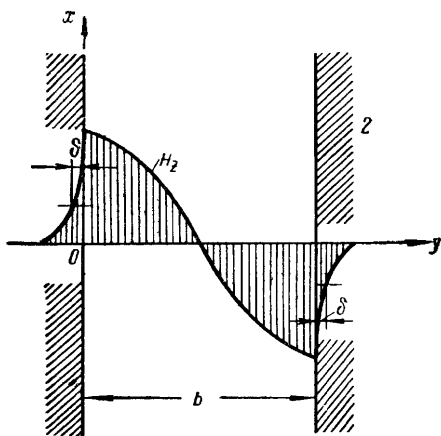


Рис. 2.37. Распределение составляющей H_z при наличии потерь в проводнике

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} = (i\omega\epsilon + \sigma) \mathbf{E} = i\omega\epsilon^* \mathbf{E}, \quad (2.119)$$

где σ — удельная проводимость пластин, а $\epsilon^* = \epsilon + \frac{\sigma}{i\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость.

После введения ϵ^* ур-ние (2.119) приобретает такой же вид, что и (2.9), а следовательно, все остальные уравнения § 2.2 сохраняют своё написание при условии замены ϵ на ϵ^* .

Переходя от ур-ния (2.16) § 2.2 к ур-нию (2.39), решение последнего в каждой из сред записываем в виде

$$H'_z(y) = A \cos ky + B \sin ky = \frac{A - iB}{2} e^{iky} + \frac{A + iB}{2} e^{-iky}, \quad (2.120)$$

где преобразование первой формы записи решения во вторую проведено при помощи формул Эйлера. Используя уравнение (2.15), можно получить

$$\begin{aligned} E'_x(y) &= -\frac{i\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H'_z}{\partial y} = \frac{i\omega\mu}{k} (A \sin ky - B \cos ky) = \\ &= \frac{\omega\mu}{k} \left(\frac{A - iB}{2} e^{iky} - \frac{A + iB}{2} e^{-iky} \right). \end{aligned} \quad (2.120a)$$

Условимся в дальнейшем обозначения коэффициентов A , B , компонентов поля H_z , E_x и параметров k , ϵ , μ снабжать индексом 1 для области 1 ($y < 0$), индексом 2 — для области 2 ($y > b$) и оставлять без индексов — для центральной области, заполненной диэлектриком ($0 < y < b$). В соответствии с графиком (рис. 2.37) для областей 1 и 2 более удобна экспоненциальная, а для центральной области — тригонометрическая формы записи решений. Поскольку в пределах областей 1 и 2 поле убывает в глубь металла, то $\text{Re} i k_{1,2} \neq 0$, а коэффициенты при экспоненциальных множителях, нарастающих в глубь металла, должны обращаться в нуль. Полагая для определённости $\text{Re} i k_{1,2} > 0$ (противоположное предположение привело бы к тем же конечным результатам), получим:

1) из условия, что поле стремится к нулю в области 1 при $y \rightarrow -\infty$,

$$\frac{A_1 + i B_1}{2} = 0;$$

2) из условия, что поле стремится к нулю, в области 2 при $y \rightarrow \infty$,

$$\frac{A_2 - i B_2}{2} = 0.$$

Используя граничные условия $H_z = H_{z2}$, $E_x = E_{x2}$ при $y = b$ и $H_z = H_{z1}$, $E_x = E_{x1}$ при $y = 0$ (рис. 2.37) и соотношения (2.120) и (2.120a), найдём четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A \cos kb + B \sin kb &= \frac{A_2 + i B_2}{2} e^{-ik_2 b} \\ \frac{i\mu}{k} (A \sin kb - B \cos kb) &= -\frac{\mu_2}{k_2} \frac{A_2 + i B_2}{2} e^{-ik_2 b} \\ A &= \frac{A_1 - i B_1}{2} \\ -\frac{i\mu}{k} B &= \frac{\mu_1}{k_1} \frac{A_1 - i B_1}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (2.121)$$

Поделив первое уравнение на второе, а третье — на четвертое, при условии, что $\mu_2 = \mu_1 = \mu$, получим

$$\frac{\frac{A}{B} + \operatorname{tg} kb}{\frac{A}{B} \operatorname{tg} kb - 1} = -i \frac{k_2}{k}; \quad \frac{A}{B} = -i \frac{k_1}{k}.$$

Определяя отсюда $\operatorname{tg} kb$ с учётом симметрии задачи ($k_2 = k_1$), найдём

$$\operatorname{tg} kb = i \frac{2kk_1}{k^2 + k_1^2}. \quad (2.122)$$

Поскольку $k_1^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon_1 \mu$ и $k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu$, то

$$k_1^2 = k^2 + \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon) \mu. \quad (2.123)$$

Заменяя в полученном соотношении $\epsilon_1 = \epsilon^* = \epsilon + \frac{\sigma}{i\omega}$ (диэлектрическую проницаемость ϵ пластин считаем такой же, как в промежутке между ними), получим

$$k_1^2 = k^2 - i\omega\mu\sigma. \quad (2.124)$$

Подставляя значение k_1 в (2.122), находим трансцендентное уравнение, определяющее собственное число k для диэлектрика,

$$\operatorname{tg} kb = \frac{2ik\sqrt{k^2 - i\omega\mu\sigma}}{2k^2 - i\omega\mu\sigma}. \quad (2.125)$$

В случае $\sigma \rightarrow \infty$ уравнение (2.125) переходит в $\operatorname{tg} kb = 0$, откуда соответствующее собственное число $k = k_\infty = \frac{n\pi}{b}$, как и в соотношении (2.43). Полагая при конечном σ , что $k = k_\infty + \Delta k$, ограничимся приближённым решением трансцендентного уравнения в случае большой проводимости σ , когда $|\Delta k| \ll k_\infty$, а $\omega\mu\sigma \gg k_\infty^2$. В этом случае собственное число k_1 для металла

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{k^2 - i\omega\mu\sigma} \approx \sqrt{-i\omega\mu\sigma} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}} \omega\mu\sigma} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1 - i) \end{aligned}$$

практически не зависит от k . Это значит, что поле в металле характеризуется той же глубиной проникновения $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi/\mu\sigma}}$,

что и при плоской однородной волне, распространяющейся в глубину металла¹⁾.

Преобразуя аналогично (2.125), получим

$$\operatorname{tg}(k_{\infty} + \Delta k)b = -(k_{\infty} + \Delta k)\delta(1 - i).$$

Разложим левую часть полученного равенства в степенной ряд, и ограничиваясь величиной первого порядка малости, пренебрежём в правой части произведением величин первого порядка Δk и δ . Тогда получим

$$b \Delta k = -k_{\infty} \delta(1 - i),$$

откуда

$$\Delta k = k_{\infty} \frac{\delta}{b} (-1 + i). \quad (2.126)$$

Итак, в случае неидеальной проводимости пластин *собственное число* $k = k_{\infty} + \Delta k$ *диэлектрической среды становится комплексным и комплексная поправка* Δk *по сравнению с идеализированным случаем имеет порядок* $k_{\infty} \frac{\delta}{b}$. Это значит, что режим чистотой стоячей волны в поперечном сечении уже не имеет места, хотя отступление от него при малом отношении $\frac{\delta}{b}$ будет невелико.

Постоянную распространения γ , характеризующую изменение поля вдоль направления распространения, находим из соотношения

$$\gamma = \sqrt{(k_{\infty} + \Delta k)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}. \quad (2.127)$$

Разлагая написанное выражение по степеням Δk , ограничиваясь при этом членом первого порядка малости и используя соотношение (2.126), получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{k_{\infty}^2 - \omega^2 \epsilon \mu} + \frac{k_{\infty}}{\sqrt{k_{\infty}^2 - \omega^2 \epsilon \mu}} \Delta k = \\ &= \gamma_{\infty} + \frac{k_{\infty}^2}{\gamma_{\infty}} \frac{\delta}{b} (-1 + i). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Проведённые преобразования имеют смысл, если модуль γ_{∞} значительно превышает Δk , и теряют смысл для критической частоты $\omega_{кр}$, когда $\gamma_{\infty} = 0$.

¹⁾ Легко видеть, что условие $\operatorname{Re} i k_1 > 0$ соблюдается. В противном случае нужно было бы изменить знак перед корнем.

Для $\omega > \omega_{кр}$, когда при отсутствии потерь $\gamma_{\infty} = i\alpha_{\infty}$, постоянная распространения системы с потерями выражается *комплексным* числом $\gamma = i\alpha + \beta$, где, в соответствии с соотношением (2.128) коэффициент затухания

$$\beta = \frac{k_{\infty}^2}{\alpha_{\infty}} \frac{\delta}{b}, \quad (2.129)$$

а фазовая постоянная $\alpha = \alpha_0 + \beta$. Появление затухания объясняется потерями энергии в стенках, а небольшое увеличение фазовой постоянной обусловлено тем, что по сравнению с идеализированным случаем границы поля смещаются на глубину проникновения δ у каждой из пластин, что равносильно незначительному увеличению расстояния b между ними. Наиболее важно появление затухания. Распределение поля вдоль оси z , соответствующее закону $e^{-\beta z} e^{i(\omega t - \alpha z)}$ затухающей бегущей волны, показано на рис. 2.38а. Оно существенно отличается от рассмотренного выше распределения при $\omega < \omega_{кр}$ в *системе без потерь*, когда распространение бегущей волны отсутствует (рис. 2.38б).

Для $\omega < \omega_{кр}$, когда $\gamma_{\infty} = \beta_{\infty}$, постоянная распространения в системе с потерями также выражается комплексным числом, где фазовая постоянная $\alpha = \frac{k_{\infty}^2}{\beta_{\infty}} \frac{\delta}{b}$, а постоянная затухания $\beta = \beta_{\infty} - \alpha$. Появление небольшой фазовой постоянной связано с переносом энергии к проводящим стенкам, но практически не сказывается на распределении (рис. 2.38б), так как поле быстро спадает (во много раз быстрее, чем при $\omega > \omega_{кр}$). Небольшое уменьшение постоянной затухания β обусловлено «эквивалентным увеличением» расстояния b между пластинами.

В случае $\omega = \omega_{кр}$, когда $\gamma_{\infty} = 0$ и выражением (2.128) пользоваться нельзя, непосредственно из выражения (2.127) можно получить

$$\gamma = i\alpha + \beta = \sqrt{2k_{\infty} \Delta k + (\Delta k)^2} \approx \sqrt{2k_{\infty} \Delta k}$$

или с учётом выражения (2.126)

$$\gamma = \sqrt{2\sqrt{2k_{\infty}^2} \frac{\delta}{b} e^{i\frac{3}{4}\pi}} = 2^{\frac{3}{4}} k_{\infty} \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi\right).$$

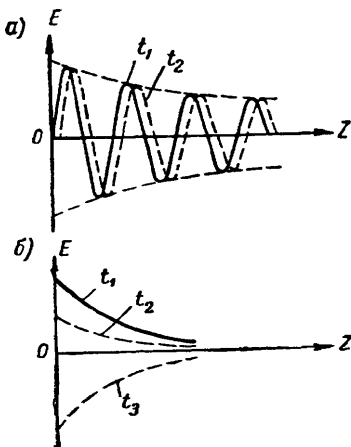


Рис. 2.38. Затухающая волна в волноводе с потерями на частоте выше критической (а) и распределение поля в волноводе без потерь на частоте ниже критической (б)

Таким образом, с учётом потерь и фазовая постоянная α и постоянная затухания β при критической частоте отличны от нуля. С теоретической точки зрения интересно, что при учёте потерь $\lambda_g = \frac{2\pi}{\alpha}$ и $v_{\phi} = \frac{\omega}{\alpha}$ не обращаются при $\omega = \omega_{кр}$ в бесконечность, хотя значительно больше своих значений, например, при $\omega > 1,1 \omega_{кр}$.

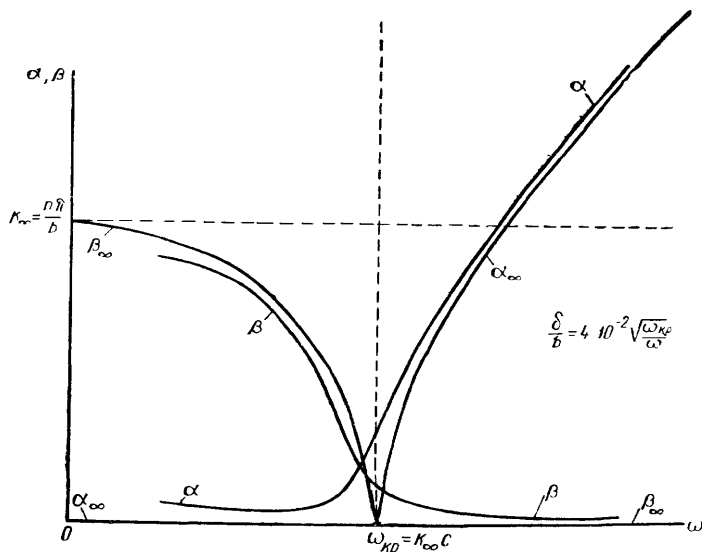


Рис. 2.39. Зависимости фазовой постоянной и постоянной затухания от частоты с учётом и без учёта потерь в проводнике

Зависимости фазовой постоянной $\alpha(\omega)$ и постоянной затухания $\beta(\omega)$ от частоты представлены на рис. 2.39: 1) α_{∞} и β_{∞} — для случая отсутствия потерь ($\sigma = \infty$ и $\delta = 0$); 2) α и β — для случая сравнительно больших (по сравнению с обычно встречающимися в волноводных устройствах) потерь (σ — конечно и при $\omega = \omega_{кр}$ отношение $\frac{\delta}{b} = 4 \cdot 10^{-2}$ ¹⁾). Случай столь больших потерь взят для получения более наглядного графика, хотя обычно отношение глубины проникновения к размеру волновода имеет порядок 10^{-6} . Это значит, что кривые для реальной системы с потерями идут значительно ближе к идеализированным, чем это показано на графике. Поэтому расчёты волноводов ведут, как правило, для идеализированного случая, интересуясь потерями лишь при расчёте коэффициента затухания для $\omega > \omega_{кр}$. Несмотря на то, что обычно $\beta \ll \alpha$,

¹⁾ Если для системы без потерь в ходе кривых наблюдается аналогия с фильтром нижних частот без потерь, то при учёте потерь наблюдается аналогия с соответствующим фильтром с потерями

при больших расстояниях, на которые передаётся энергия, величина β может играть существенную роль, определяя коэффициент полезного действия фидерного устройства.

Постоянную затухания β можно оценить *энергетическим* путём, не решая граничной задачи для системы с потерями, что особенно важно при более сложных конфигурациях поперечного сечения.

В самом деле, в системе с потерями поле убывает вдоль оси z по закону $e^{-\beta z}$, а переносимая мощность по закону $e^{-2\beta z}$. Потеря мощности на участке Δz будет

$$\Delta P_n = P (1 - e^{-2\beta \Delta z}) \approx 2 P \beta \Delta z,$$

откуда

$$\beta = \frac{1}{2P} \frac{\Delta P_n}{\Delta z}. \quad (2.129 \text{ а})$$

Эту величину можно найти, пользуясь решением идеализированной краевой задачи, считая, что при конечном, но достаточно большом σ структура поля почти такая же, как и при $\sigma \rightarrow \infty$.

Рассчитаем её применительно к рассмотренному выше случаю волны H между плоскостями для произвольного участка a вдоль оси x (рис. 2.20). Используя соотношения (2.71—2.73), можно найти переносимую мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^b E_x H_y a dy = \frac{E_{xm}^2}{4 \rho_H} ab.$$

Мощность потерь ΔP_n рассчитывается как мощность, выделяемая поверхностным током (рис. 2.16) на двух прямоугольных участках поверхности раздела размером $a \times \Delta z$ каждый,

$$\Delta P_n = 2 \frac{1}{2} J_{Sxm}^2 R_S a \Delta z.$$

Здесь, по граничному условию и в соответствии с соотношением (2.73), амплитуда поверхностного тока

$$J_{Sxm} = H_{zm}|_{y=0 \text{ и } y=b} = \frac{E_{xm}}{\rho_H} \frac{n \lambda_g}{2b},$$

а $R_S = \frac{1}{\sigma b} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$ —поверхностное сопротивление.

Используя найденные соотношения, из ур-ния (2.129а) получим

$$\beta = \frac{2 R_S}{\rho_H} \left(\frac{n \lambda_g}{2b} \right)^2 \frac{1}{b}.$$

После замен:

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}, \quad \rho_H = \frac{\alpha_\infty}{\omega\mu}, \quad \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \delta$$

и

$$\left(\frac{n\lambda_b}{2b}\right)^2 = \frac{k_\infty^2}{\alpha_\infty^2}$$

найденное выражение преобразуется в выражение (2.129), полученное ранее на основании строгого решения. Описанный энергетический метод даёт, таким образом, *достаточно точный результат* (2.129), справедливый при $\omega > \omega_{кр}$, который становится несправедливым лишь в окрестности критической частоты.

Энергетический метод можно рассматривать как метод *последовательных приближений*, а δ — как малый параметр задачи. Решение для $\sigma = \infty$ является с этой точки зрения нулевым приближением ($\delta = 0$). По структуре поля нулевого приближения находится постоянная затухания β в первом приближении. Этот метод нашёл в настоящее время широкое распространение и будет часто использоваться в дальнейшем.

Следует указать, что в ходе расчёта потерь энергии выражение для поверхностного сопротивления R_S было взято на основе теории плоской однородной волны, входящей в металл. В действительности волна, входящая в металл, является неоднородной, однако изменение поля вдоль оси z происходит в металле во много раз медленнее, чем в глубь металла вдоль оси y , если только глубина проникновения δ мала. Поэтому при вычислении R_S , как и при вычислении δ , *можно пользоваться результатами теории плоской однородной волны*. С точки зрения найденных ранее *точных соотношений*

$$R_S = \operatorname{Re} \frac{E_x}{H_z} \Big|_{y=0} = \operatorname{Re} \frac{\omega\mu}{k_1} = \operatorname{Re} \frac{\omega\mu}{\sqrt{k^2 - i\omega\mu\sigma}}$$

и при $k^2 \ll \omega\mu\sigma$ действительно получаем такое же выражение

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}, \quad (2.130)$$

как и в случае плоской однородной волны, входящей в металл.

Заменяя для неферромагнитных металлов $\omega\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = 120\pi \frac{2\pi}{\lambda}$, можно записать

$$R_S = \pi \sqrt{\frac{120}{\sigma\lambda}}. \quad (2.131)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ

§ 3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На примере распространения электромагнитных волн между двумя идеально проводящими параллельными плоскостями в предыдущей главе книги уже были выяснены некоторые характерные особенности направленной передачи электромагнитной энергии. К числу этих особенностей можно отнести возможность существования волн различных видов и наличие критических частот для каждого из видов волн. Как будет показано ниже, эти особенности присущи не только рассмотренному в первой главе простейшему случаю направленной передачи электромагнитной энергии в пространстве между двумя параллельными плоскостями, а характерны для значительно более широкого класса волноводов.

Определение волновода как полой металлической трубы, направляющей распространение электромагнитной энергии, которое было дано во введении, не является единственным. Часто любую систему проводников или диэлектриков, предназначенную для направленной передачи электромагнитной энергии вдоль заданной траектории, называют волноводом. С этой точки зрения двухпроводная линия и коаксиальный кабель также являются волноводами.

Таким образом, можно говорить о волноводе в узком смысле слова, имея в виду полую металлическую трубу, и волноводе в широком смысле слова, имея в виду любую систему, направляющую распространение электромагнитной энергии вдоль заданной траектории.

Волноводы называют *цилиндрическими*, если они ограничены цилиндрическими поверхностями произвольной формы сечения ¹⁾.

На рис. 3.1а, б, в и г показаны цилиндрические волноводы в виде полых проводящих труб различной формы сечения. Сюда

¹⁾ Напомним, что поверхность называют цилиндрической, если она может быть образована путём перемещения некоторой прямой в пространстве (образующей) вдоль произвольной кривой так, чтобы эта прямая всё время оставалась параллельна самой себе.

относятся прямоугольный и круглый волноводы, широко используемые в технике свч, а также П-образный и Н-образный волноводы, способные передавать сравнительно широкий диапазон частот. На рис. 3.1*д* и *е* показаны двухпроводная и коаксиальная линии, представляющие собой цилиндрические волноводы в широком смысле этого слова.

К цилиндрическим волноводам в широком смысле слова, кроме двухпроводной линии, коаксиальной линии и полых металлических труб, принадлежит ещё целый ряд систем. К ним относятся, например, стержни из диэлектрика (рис. 3.1*ж*) или, как их

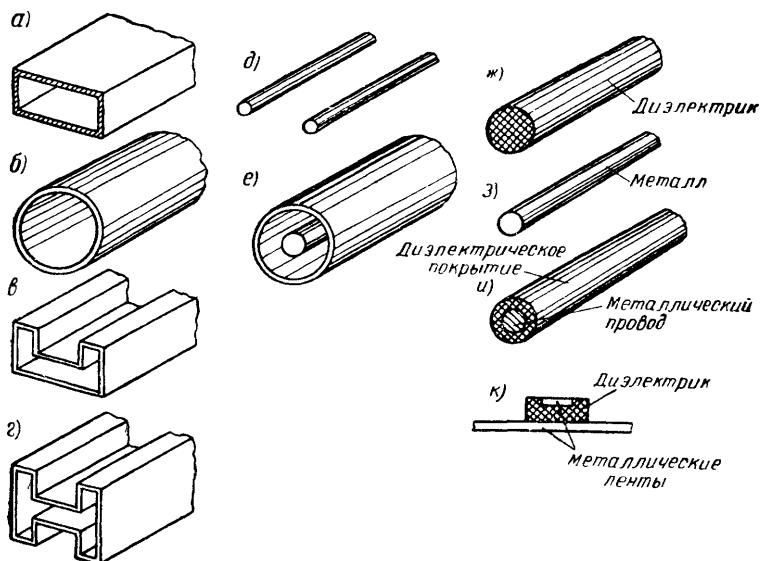


Рис 3.1. Различные виды цилиндрических волноводов в широком смысле слова

называют иначе, *диэлектрические волноводы*, которые не используются в качестве фидерных линий свч из-за отсутствия диэлектриков с малыми потерями, но иногда находят применение как элементы диэлектрических антенн. Возможный путь снижения потерь в таких волноводах состоит в замене диэлектрических стержней полыми диэлектрическими трубами. Цилиндрическими волноводами в широком смысле являются также *проводящий одиночный провод*, *одиночный провод с диэлектрическим покрытием* (рис. 3.1*з,и*). За последние годы опубликован ряд работ по использованию подобных систем в диапазоне сверхвысоких частот. Волноводом в широком смысле слова является, наконец, *система из двух (или более) проводящих плоскостей*, рассмотренная в предыдущей главе и применяемая как элемент антенных устройств. Широкое применение может найти *система двух парал-*

лельных проводящих лент (рис. 3.1к), разделённых диэлектриком, которая отличается компактностью и диапазоном и также представляет собой волновод в широком смысле слова.

В данной главе будут рассмотрены методы нахождения частных решений уравнений электромагнитного поля для однородных участков цилиндрических волноводов, ограниченных идеально проводящими поверхностями. Соотношения, полученные из уравнений электромагнитного поля, могут быть использованы также для других видов волноводов, но граничные условия при этом несколько усложняются.

Однородным, или регулярным, участком волновода называют такой участок, сечение и параметры среды вдоль которого остаются неизменными и на протяжении которого отсутствуют сторонние токи и заряды в диэлектрике. Каждое частное решение удовлетворяет в пределах однородного участка граничному условию $E_{\tau} = 0$ на идеально проводящих стенках волновода.

Частные решения могут быть использованы при составлении общего решения, которое строится как линейная комбинация частных решений (соответствующий пример был рассмотрен в § 2.13). Отыскание частных решений имеет, кроме того, большой самостоятельный интерес, поскольку позволяет составить основные представления о работе волновода.

§ 3.2. МЕТОД ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ И ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Основой для использования метода частных решений является известная из электродинамики теорема единственности решений уравнений электромагнитного поля. Если составленное из частных решений общее решение удовлетворяет условиям этой теоремы, можно утверждать, что оно является искомым единственным решением задачи.

В своей обычной формулировке теорема единственности сводится к следующему. Электромагнитное поле в произвольной точке объёма V однозначно определяется для любого момента времени заданными внутри объёма сторонними зарядами и токами, если, кроме того, известны:

1) начальные условия, т. е. значения векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в любой точке объёма для некоторого начального момента времени $t_0 < t$;

2) граничные условия, т. е. значения тангенциальной составляющей одного из векторов поля на замкнутой поверхности S , ограничивающей объём, для произвольного момента времени $t > t_0$.

В случае вынужденных периодических колебаний в системе с потерями установившийся режим определяется вынуждающими силами независимо от начального состояния системы¹⁾, поэтому

¹⁾ В качестве примера можно сослаться на колебательный контур.

начальные условия исключаются. В этом случае условие периодичности заменяет начальные условия. Единственность решения определяется тогда заданием источников энергии внутри объема V и граничных условий на его поверхности S .

При решении ряда волноводных задач граничные условия даются иногда в несколько более общей форме, чем это указывалось выше. Так на части поверхности S может быть задана тангенциальная составляющая электрического поля E_τ , на другой её части — тангенциальная составляющая магнитного поля H_τ , а на оставшейся части — отношение $\frac{E_\tau}{H_\tau}$ при условии перпендикулярности обеих тангенциальных составляющих. Можно показать, что решение будет единственным, если граничные условия заданы для всей замкнутой поверхности S ¹⁾.

Применяя теорему единственности к регулярному участку волновода в виде полой металлической трубы, в качестве замкнутой поверхности S удобно взять поверхность, ограниченную проводящими стенками трубы и перпендикулярными к ним торцевыми плоскостями. Считая трубу идеально проводящей, имеем для поверхности её стенок граничное условие $E_\tau = 0$. Задание дополнительных граничных условий необходимо поэтому лишь для торцевых плоскостей. Если же граничные условия на торцах не заданы, решение не будет единственным. Получается бесконечная последовательность частных решений для регулярного участка волновода, соответствующая различным видам граничных условий на торцевых плоскостях; каждое из частных решений удовлетворяет однородным уравнениям электромагнитного поля в диэлектрике и условию $E_\tau = 0$ на границе с идеальным проводником, но имеет свои граничные условия на торцевых плоскостях. Иначе говоря, каждое частное решение соответствует своему типу волны (так же, как и в гл. 2).

Общее решение может быть построено как линейная комбинация частных решений, если система последних является замкнутой (полной) в математическом смысле слова. В этом случае любое реально существующее в волноводе поле может быть представлено как сумма отдельных полей путём соответствующего подбора коэффициентов разложения. Если полученное таким образом решение уравнений электромагнитного поля удовлетворяет условиям теоремы единственности, второго решения быть не может.

§ 3.3. ОТЫСКАНИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ. МЕМБРАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приступим к отысканию системы частных решений на регулярном участке волновода. Для простейшей направляющей поверхно-

¹⁾ См. приложение 3.1.

сти в виде двух параллельных идеально проводящих плоскостей подобная система решений уже была рассмотрена в гл. 2. Этой системе соответствовали волны TEM , H_n и E_n ($n=1,2,\dots$) в пространстве между плоскостями. Сейчас необходимо будет решить аналогичную задачу для более общего случая однородного цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками, сечение которого представляет собой односвязную или многосвязную область произвольной формы ¹⁾.

Исходными при этом являются однородные уравнения электромагнитного поля в диэлектрической среде, заполняющей волновод.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Среду, как и ранее, считаем однородной и изотропной, потери в среде не учитываем. Отсюда, как известно, можно прийти к двум дифференциальным уравнениям второго порядка относительно векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ порознь. Чтобы исключить вектор $\mathbf{H}$ из уравнения (3.1), достаточно взять ротор от левой и правой его частей, а выражение $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ заменить при помощи соотношения (3.2). Тогда получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Подобным же образом

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Используя известную формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$$

и замечая, что для регулярного участка волновода не только $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, но и $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$, приходим к однородным волновым уравнениям:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

где $\nabla^2 = \Delta$ — оператор Лапласа.

¹⁾ Односвязной называют область, ограниченную одной замкнутой кривой. Непрерывные линии, связывающие две произвольные точки односвязной области, могут быть переведены одна в другую путём последовательной деформации. В противном случае область называется многосвязной. Примером многосвязной области является область в поперечном сечении коаксиального кабеля, ограниченная проводящими поверхностями.

В прямоугольной системе координат

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Условимся в дальнейшем, что ось z будет всегда направлена вдоль волновода. Координату z в соответствии с этим будем называть *продольной*. Координаты x и y , относящиеся к плоскости поперечного сечения S , назовём *поперечными*.

Оператор Лапласа по поперечным координатам обозначим

$$\nabla_S^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

тогда

$$\nabla^2 = \nabla_S^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Волновые уравнения принимают вид:

$$\nabla_S^2 \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

$$\nabla_S^2 \mathbf{H} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Используя известный в математической физике *метод разделения переменных*, частные решения будем искать в виде произведения трех функций: векторной функции координат поперечного сечения, скалярной функции продольной координаты и функции времени, например,

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}'(x, y) Z(z) T(t) \quad (3.7)$$

Для режима вынужденных колебаний с заданной частотой ω функция времени известна $T(t) = e^{i\omega t}$. Функция поперечных координат $\mathbf{E}'(x, y)$ должна быть выбрана так, чтобы обеспечить выполнение граничных условий на стенах волновода. Дальнейшее разделение этой функции по координатам x и y пока нецелесообразно, поскольку в этом случае не удаётся обеспечить выполнение граничных условий при произвольной форме сечения волновода для каждого частного решения порознь. Вид функции $Z(z)$ может быть определён из расчёта.

Подставляя для этого выражение (3.7) в уравнение (3.5), разделим последнее на произведение $Z(z) T(t)$. Заменяя при этом функцию времени $T(t)$ её значением, приходим к соотношению

$$\nabla_S^2 \mathbf{E}'(x, y) = - \left[\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \omega^2 \varepsilon \mu \right] \mathbf{E}'(x, y). \quad (3.8)$$

В левой части написанного соотношения стоит функция поперечных координат x и y , следовательно, правая часть должна быть функцией тех же самых координат. Поскольку переменная z может принимать независимые от x и y значения, то уравнение (3.8) будет удовлетворено только в том случае, если выражение $\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$ является постоянной величиной. Обозначая эту постоянную γ^2 , приходим к раздельным дифференциальным уравнениям для функции распределения поля вдоль оси волновода

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \gamma^2 Z(z) \quad (3.9)$$

и функции распределения поля в поперечном сечении

$$\nabla_S^2 \mathbf{E}'(x, y) + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) \mathbf{E}'(x, y) = 0. \quad (3.10)$$

Решения уравнения (3.9) хорошо известны

$$Z(z) = e^{\mp \gamma z}.$$

Поэтому соотношение (3.7) может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}'(x, y) e^{i \omega t \mp \gamma z}. \quad (3.11)$$

Подобным же образом можно получить

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}'(x, y) e^{i \omega t \mp \gamma z}. \quad (3.12)$$

Отсюда вытекает, что возможны частные решения волновых уравнений, которые характеризуются *волнообразным законом распределения поля вдоль оси волновода*, подобно тому, как это имело место для более частного случая, рассмотренного в гл. 2¹⁾.

Каждое из векторных соотношений (3.11) и (3.12) эквивалентно трём скалярным, (2.4) и (2.5) соответственно.

Функция распределения вектора электрического поля $\mathbf{E}'(x, y)$ определяется из уравнения (3.10), которое после замены

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu = k^2 \quad (3.13)$$

принимает вид

$$\nabla_S^2 \mathbf{E}'(x, y) + k^2 \mathbf{E}'(x, y) = 0. \quad (3.14)$$

¹⁾ Частные решения волновых уравнений можно было бы сразу искать в форме (3.11), (3.12), как это делалось во второй главе. Приведённое рассуждение представляет известное обоснование выбора такой формы частных решений.

Аналогично можно получить

$$\nabla_S^2 \mathbf{H}'(x, y) + k^2 \mathbf{H}'(x, y) = 0. \quad (3.15)$$

Уравнения такого же вида можно написать для каждой из проекций векторов $\mathbf{E}'(x, y)$, $\mathbf{H}'(x, y)$, а именно для $E'_x(x, y)$, $E'_y(x, y)$ и т. д. Подобные уравнения встречаются в теории мембран и называются поэтому мембранными уравнениями. От дифференциальных уравнений одномерной задачи они отличаются тем, что содержат частные производные по двум поперечным координатам.

§ 3.4. ПОПЕРЕЧНЫЕ И ПРОДОЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПОЛЯ. ВЫРАЖЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОМПОНЕНТОВ ЧЕРЕЗ ПРОДОЛЬНЫЕ

Наряду с продольными скалярными компонентами E_z и H_z векторов электромагнитного поля, удобно ввести поперечные векторные компоненты $\mathbf{E}_S$ и $\mathbf{H}_S$, параллельные плоскости поперечного сечения S (рис. 3.2).

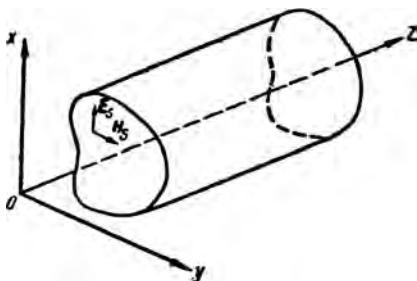


Рис. 3.2. Цилиндрический односвязный волновод произвольной формы сечения

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_S + \mathbf{z}^0 E_z \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_S + \mathbf{z}^0 H_z \end{aligned} \right\}, \quad (3.16)$$

где $\mathbf{z}^0$ — единичный вектор (орт) вдоль координатной оси z .

Запись (3.16) удобна тем, что она предусматривает произвольную (а не обязательно прямоугольную) систему координат в плоскости поперечного сечения волновода, что существенно при произвольной форме его граничной поверхности.

Разделив обе части равенства (3.16) на волновой множитель $e^{i\omega t - \gamma z}$, получим подобные же соотношения для функций распределения составляющих поля

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_S + \mathbf{z}^0 E'_z \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H}'_S + \mathbf{z}^0 H'_z \end{aligned} \right\}, \quad (3.17)$$

Полученные соотношения позволяют упростить решение мембранных уравнений. Подставляя первое из написанных соотношений в ур-ние (3.14), приходим к соотношению вида

$$(\nabla_S^2 \mathbf{E}'_S + k^2 \mathbf{E}'_S) + \mathbf{z}^0 (\nabla_S^2 E'_z + k^2 E'_z) = 0.$$

В левой части этого соотношения стоит сумма поперечного и продольного векторов, взаимно-перпендикулярных между собой ¹⁾. Эта сумма может быть равна нулю только в том случае, если равен нулю каждый из этих векторов порознь. Отсюда получаем два мембранных уравнения, векторное и скалярное, отдельно для функций распределения поперечной и продольной составляющих электрического поля:

$$\nabla_S^2 \mathbf{E}'_S + k^2 \mathbf{E}'_S = 0, \quad (3.18)$$

$$\nabla_S^2 E'_z + k^2 E'_z = 0. \quad (3.19)$$

Подобным же образом для функций распределения составляющих магнитного поля будем иметь:

$$\nabla_S^2 \mathbf{H}'_S + k^2 \mathbf{H}'_S = 0, \quad (3.20)$$

$$\nabla_S^2 H'_z + k^2 H'_z = 0. \quad (3.21)$$

Итак, два векторных мембранных уравнения (3.14) и (3.15) распадутся на четыре мембранных уравнения, два из которых являются векторными и два скалярными. Четыре полученные уравнения эквивалентны шести скалярным для функций распределения проекций векторов поля на оси координат x, y, z .

Оказывается, нет необходимости находить решения всех найденных четырёх мембранных уравнений. Дело в том, что продольные и поперечные компоненты не являются независимыми друг от друга, а связаны уравнениями электромагнитного поля (3.1) и (3.2), более общими, чем использованные при расчёте волновые уравнения (3.3) и (3.4). Это позволяет ограничиться решением только двух скалярных мембранных уравнений (3.19) и (3.21) для продольных составляющих поля E_z и H_z . Поперечные же векторные составляющие можно определить по известным продольным подобно тому, как это было сделано в гл. 2.

С тем чтобы более простым путём найти выражения поперечных компонентов через продольные, возвратимся к записи уравнений электромагнитного поля (2.10) в прямоугольной системе координат. Заменяя для решений рассматриваемого вида дифференцирование по t и по z умножением соответственно на $i\omega$ и $-\gamma$, найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y &= -i\omega\mu H_x, & \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y &= i\omega\varepsilon E_x \\ -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu H_y, & -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon E_y \end{aligned} \right\}. \quad (3.22)$$

¹⁾ Производная, как и приращение, поперечного вектора представляет собой также поперечный вектор.

Здесь использованы не все шесть ур-ний (2.10), а только четыре: по два верхних уравнения из каждого столбца. Оставшиеся два можно было бы использовать для вывода мембранных уравнений, но последние уже получены без перехода к прямоугольной системе координат. Уравнения (3.22) содержат проекции искомых поперечных составляющих E_x , H_y , E_y , H_x и не содержат их производных. Из них уравнения, выделенные в тексте, содержат лишь проекции E_x и H_y . Приходим, таким образом, к системе двух уравнений для определения этих двух неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} -\gamma E_x + i\omega\mu H_y &= \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ i\omega\varepsilon E_x - \gamma H_y &= \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned} \right\}.$$

Решая совместно эти уравнения, с учётом выражения (3.13) получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } -k^2 E_x &= \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \text{б) } -k^2 H_y &= \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} + i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \right\}. \quad (3.23)$$

Аналогично решается система ур-ний (3.22) для H_x и E_y . В силу двойственности уравнений Максвелла результат её решения можно сразу получить из (3.23), заменяя E на H и μ на $-\varepsilon$:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } -k^2 H_x &= \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} - i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \text{б) } -k^2 E_y &= \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \right\}. \quad (3.24)$$

Комбинируя соотношения (3.23а) и (3.24б), можно найти

$$\mathbf{E}_S = x^0 E_x + y^0 E_y.$$

Для этого достаточно умножить ур-ние (3.23а) на орт x^0 , а (3.24б) на орт y^0 и результаты сложить.

В левой части равенства при этом получится вектор $-k^2 (x^0 E_x + y^0 E_y) = -k^2 \mathbf{E}_S$. В правой части равенства четыре векторных слагаемых можно представить в виде двух векторов. Первый вектор

$$x^0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + y^0 \frac{\partial E_z}{\partial y} = \text{grad}_S E_z = \nabla_S E_z$$

представляет собой градиент скалярной функции $E_z(x, y, z, t)$ по координатам x и y плоскости S поперечного сечения. Последнее отмечено добавлением индекса S к обозначениям градиента и дифференциального оператора $\nabla_S = x^0 \frac{\partial}{\partial x} + y^0 \frac{\partial}{\partial y}$. Второй вектор, получающийся в правой части равенства, используя соотношения между ортами, можно привести к виду

$$x^0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - y^0 \frac{\partial H_z}{\partial x} = \left[\left(y^0 \frac{\partial H_z}{\partial y} + x^0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) z^0 \right] = [\text{grad}_S H_z z^0].$$

Это выражение представляет собой векторное произведение градиента $H_z(x, y, z, t)$ по координатам поперечного сечения и продольного орта z^0 .

Итак,

$$-k^2 E_S = \gamma \text{grad}_S E_z + i \omega \mu [\text{grad}_S H_z z^0]. \quad (3.25)$$

Аналогично находим двойственное соотношение

$$-k^2 H_S = \gamma \text{grad}_S H_z - i \omega \epsilon [\text{grad}_S E_z z^0]. \quad (3.26)$$

Уравнения (3.25) и (3.26) представляют собой искомые выражения поперечных компонентов через продольные.

Если сократить эти выражения на волновой множитель $e^{i\omega t - \gamma z}$, получим выражения, связывающие соответствующие функции распределения по координатам поперечного сечения $E_S(x, y)$, $H_S(x, y)$, $E'_z(x, y)$, $H'_z(x, y)$. Поскольку для произвольной функции двух переменных $\psi(x, y)$ производная по третьей независимой переменной $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ равна нулю, то $\text{grad}_S \psi = \text{grad} \psi$. Поэтому можно записать:

$$-k^2 E'_S = \gamma \text{grad} E'_z + i \omega \mu [\text{grad} H'_z z^0], \quad (3.27)$$

$$-k^2 H'_S = \gamma \text{grad} H'_z - i \omega \epsilon [\text{grad} E'_z z^0]. \quad (3.28)$$

Здесь индексы дифференцирования по координатам поперечного сечения опущены.

Несмотря на то, что при выводе была использована прямоугольная система координат, полученные векторные равенства инвариантны (т. е. не изменяются) при изменении системы координат, так как последнее является свойством соответствующих векторных операций. При переходе к какой-либо новой системе координат нужно воспользоваться лишь соответствующим выражением для градиента в этой системе. Например, при использо-

вании цилиндрической системы координат r, φ, z (а в поперечном сечении — полярной r, φ) соответствующий градиент можно рассчитать так

$$\text{grad } \psi(r, \varphi) = \mathbf{r}^0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \varphi^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (3.29)$$

Для одномерной задачи, когда $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, найденные выше соотношения переходят в соотношения гл. 2 (в чём полезно самостоятельно убедиться при изучении излагаемого материала).

Ввиду важности выражений поперечных компонентов через продольные, дадим ещё один их вывод без перехода к прямоугольной системе координат.

Преобразуем выражение для $\text{rot } \mathbf{E}$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left[\left(\nabla_S + \mathbf{z}^0 \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{E}_S + \mathbf{z}^0 E_z) \right]. \quad (3.30)$$

После раскрытия скобок и замены $\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{z}^0 H_z$ ур-ние (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} [\nabla_S \mathbf{E}_S] + [\nabla_S E_z \mathbf{z}^0] + \left[\mathbf{z}^0 \frac{\partial \mathbf{E}_S}{\partial z} \right] + \left[\mathbf{z}^0 \frac{\partial E_z}{\partial z} \mathbf{z}^0 \right] = \\ = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_S}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \mathbf{z}^0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

В левой части полученного соотношения содержится четыре вектора. Первый из них является *продольным*, поскольку его направление определяется векторным произведением поперечных ортов дифференциального оператора ∇_S и поперечного вектора $\mathbf{E}_S$. Второй вектор — *поперечный*, поскольку его направление определяется векторным произведением поперечных ортов дифференциального оператора ∇_S и продольного вектора $\mathbf{z}^0$. Третий вектор также является *поперечным* как векторное произведение продольного вектора на поперечный. Четвёртый вектор *равен нулю* как векторное произведение двух параллельных между собой векторов $(\mathbf{z}^0 \cdot \mathbf{z}^0)$.

Вследствие перпендикулярности оси z волновода и плоскости поперечного сечения S продольные и поперечные векторы в правой и левой частях уравнения должны быть *порознь равны между собой*. Выделяя поперечные векторы и заменяя дифференцирование по t и z умножением соответственно на $i\omega$ и $-\gamma$, найдём

$$[\nabla_S E_z \mathbf{z}^0] - \gamma [\mathbf{z}^0 \mathbf{E}_S] = -i\omega\mu \mathbf{H}_S,$$

где $\nabla_S E_z = \text{grad}_S E_z$.

Перенося неизвестные векторы $\mathbf{E}_S$ и $\mathbf{H}_S$ в левую часть равенства, получим

$$\gamma [\mathbf{z}^0 \mathbf{E}_S] - i\omega\mu \mathbf{H}_S = [\text{grad}_S E_z \cdot \mathbf{z}^0]. \quad (3.32)$$

Путём замены E на H , а μ на $-\epsilon$ и обратно напишем двойственное уравнение

$$\gamma [\mathbf{z}^0 \mathbf{H}_S] + i\omega\epsilon \mathbf{E}_S = [\text{grad}_S H_z \mathbf{z}^0]. \quad (3.33)$$

Написанная система уравнений (3.32) и (3.33) является системой двух векторных уравнений первой степени, которую нужно решить относительно $\mathbf{E}_S$ и $\mathbf{H}_S$. Решение может быть проведено так же, как и для системы скалярных уравнений, например, используя *метод уравнивания коэффициентов*. Чтобы в результате алгебраического сложения уравнений исключить вектор $\mathbf{H}_S$, достаточно уравнение (3.32) умножить векторно слева на γz^0 , уравнение (3.33) на скаляр $i\omega\mu$ и оба уравнения сложить.

$$\gamma^2 [z^0 [z^0 \mathbf{E}_S]] - \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E}_S = \gamma [z^0 [\text{grad}_S E_z z^0]] + i\omega\mu [\text{grad}_S H_z z^0].$$

Используя формулу двойного векторного произведения $[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \mathbf{b} (\mathbf{a} \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \mathbf{b})$, найдём:

$$[z^0 [z^0 \mathbf{E}_S]] = z^0 (z^0 \mathbf{E}_S) - \mathbf{E}_S (z^0 z^0),$$

$$[z^0 [\text{grad}_S E_z z^0]] = \text{grad}_S E_z (z^0 z^0) - z^0 (z^0 \text{grad}_S E_z).$$

Поскольку векторы $\mathbf{E}_S$ и $\text{grad}_S E_z$ поперечные (последний раскладывается по ортам $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$, лежащим в поперечной плоскости), каждый из них *перпендикулярен* продольному орту z^0 и соответствующие скалярные произведения обращаются в нуль. Заменяя скалярные произведения ортов $z^0 z^0 = 1$ и учитывая соотношение (3.13), окончательно находим

$$-k^2 \mathbf{E}_S = \gamma \text{grad}_S E_z + i\omega\mu [\text{grad}_S H_z z^0]. \quad (3.34)$$

Соответствующее выражение для $\mathbf{H}_S$ записывается как двойственное найденному.

§ 3.5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ

Продольная составляющая электрического поля является у боковых стенок *тангенциальной* к их поверхности. Поэтому на границе со стенкой

$$E_z = 0, \quad (3.35)$$

т. е. *продольная составляющая электрического поля на границе с идеально проводящей поверхностью стенки волновода обращается в нуль*. Заметим попутно, что контур поперечного сечения волновода можно считать линией постоянного, а именно нулевого, уровня функции распределения $E'_z(x, y)$ продольной составляющей электрического поля по координатам поперечного сечения. Поэтому вектор $\text{grad} E'_z$ и получающийся из него путём умножения на волновой множитель вектор $\text{grad}_S E_z$ ориентированы *по нормали* к контуру поперечного сечения волновода. Это обстоятельство будет использовано при выводе граничного условия для продольной составляющей магнитного поля H_z .

Граничное условие $E_\tau = 0$ означает, что вектор $\mathbf{E}$ параллелен вектору нормали $\mathbf{n}$ (либо равен нулю) на границе с идеально проводящей поверхностью волновода. Иначе можно написать

$$[\mathbf{n} \mathbf{E}] = 0. \quad (3.36)$$

Поскольку на граничной поверхности $E_z = 0$, то для неё $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s$, и, подставляя в (3.36) $\mathbf{E}_s$, выраженное через продольные составляющие, получим

$$\gamma [\mathbf{n} \operatorname{grad}_s \mathbf{E}_z] + i \omega \mu [\mathbf{n} [\operatorname{grad}_s H_z \mathbf{z}^0]] = 0. \quad (3.37)$$

Поскольку вектор $\operatorname{grad}_s \mathbf{E}_z$ направлен параллельно нормали, то по свойствам векторного произведения первое слагаемое в соотношении (3.37) равно нулю. Преобразуя остающееся двойное векторное произведение, найдём

$$[\mathbf{n} [\operatorname{grad}_s H_z \mathbf{z}^0]] = \operatorname{grad}_s H_z (\mathbf{n} \mathbf{z}^0) - \mathbf{z}^0 (\mathbf{n} \operatorname{grad}_s H_z) = 0.$$

Здесь в силу взаимной перпендикулярности векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{z}^0$ скалярное произведение $\mathbf{n} \mathbf{z}^0 = 0$. Поэтому

$$\mathbf{n} \operatorname{grad}_s H_z = 0.$$

Из математики известно, что произведение единичного вектора на градиент скалярной функции представляет собой производную от функции по направлению единичного вектора. Поэтому граничное условие для продольной составляющей H_z принимает вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (3.38)$$

Это значит, что производная от продольной составляющей магнитного поля по направлению нормали к идеально проводящей поверхности должна быть равна нулю.¹⁾

Итак, граничные условия для обеих продольных составляющих поля найдены. Нетрудно перейти от них к граничным условиям для функций распределения $E'_z(x, y)$ и $H'_z(x, y)$, производя сокращение на волновой множитель:

$$\left. \begin{aligned} E'_z &= 0 \\ \frac{\partial H'_z}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.39)$$

¹⁾ В частном случае волн H_n мы имели $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ при $y = 0$ и $y = b$. Этому условию соответствовал экстремум H_z у идеально проводящих стенок, связанный с протеканием токов проводимости. Для рассматриваемых далее случаев условие (3.38) имеет тот же смысл.

Характерно, что при идеальной проводимости стенок граничные условия для E'_z и H'_z оказываются *независимыми* друг от друга: в первое из этих уравнений входит только E_z , во второе — только H'_z .

Таким образом, задача определения частных решений уравнений электромагнитного поля сводится к решению независимых скалярных уравнений вида

$$\nabla_S^2 \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0$$

при раздельных граничных условиях $\psi = 0$ или $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ на контуре S поперечного сечения (в зависимости от того, для какой из продольных составляющих поля решается уравнение) и аналогична задаче об определении частных решений для колебаний мембран с закреплёнными или незакреплёнными краями соответственно.

Каждая из этих задач имеет бесконечное множество дискретных линейнонезависимых частных решений, что в общем виде доказывается в курсах математической физики и иллюстрируется ниже на ряде примеров. Каждому такому решению соответствует вполне определённое значение параметра k^2 , называемое *собственным значением*, а значит, и вполне определённое значение постоянной распространения

$$\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu. \quad (3.40)$$

Поскольку расчёты продольных компонентов электрического и магнитного полей не связаны между собой, как и для частного случая параллельных плоскостей, целесообразно рассмотреть раздельно:

1) частные решения, для которых $E_z \neq 0$ и $H_z = 0$, соответствующие *поперечно-магнитным* или *электрическим* (E) волнам;

2) частные решения, для которых $E_z = 0$ и $H_z \neq 0$, соответствующие *поперечно-электрическим* или *магнитным* (H) волнам.

Наряду с решениями, в которых равна нулю только одна из продольных составляющих поля, следует иметь в виду решения, для которых *обе продольные составляющие поля одновременно равны нулю* ($E_z = 0$ и $H_z = 0$), соответствующие *поперечным электромагнитным волнам* (TEM).

§ 3.6. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН (TEM)

Ввиду того, что для поперечных электромагнитных волн в пределах всего поперечного сечения $E_z = 0$ и $H_z = 0$, то соотношения (3.25) и (3.26) дают:

$$-k^2 E_S = 0, \quad -k^2 H_S = 0.$$

Поскольку поперечные векторы $\mathbf{E}_S$ и $\mathbf{H}_S$ отличны от нуля (если хотя бы один из них был тождественно равен нулю, существование волны оказалось бы невозможным), для волн TEM

$$k^2 = 0 \quad (3.41)$$

или

$$\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu = 0. \quad (3.42)$$

Отсюда находим постоянную распространения, которая для волны TEM является всегда *чисто мнимой величиной*

$$\gamma = i\alpha = \sqrt{-\omega^2 \epsilon \mu}. \quad (3.43)$$

Это значит, что распределение поля вдоль оси z при любой частоте ω подчиняется волновому закону $e^{i(\omega t - \alpha z)}$, в котором α определяется по формуле

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.44)$$

Здесь $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ — скорость плоской однородной волны в свободном пространстве (скорость света в данной среде), а $\lambda = \frac{v}{f}$ — длина волны в свободном пространстве для этой среды. Волновой множитель можно тогда записать

$$e^{i(\omega t - \alpha z)} = e^{i\omega \left(t - \frac{z}{v_{\phi}} \right)},$$

откуда видно, что фазовая скорость $v_{\phi} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ волны TEM совпадает со скоростью света $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ в свободном пространстве для данной среды.

Структура поля волны TEM в плоскости поперечного сечения также имеет некоторые общие черты со структурой поля плоской однородной волны в свободном пространстве. Поскольку в пределах всего поперечного сечения $\mathbf{H}_z = 0$, из соотношений (3.33) находим

$$\mathbf{E}_S = -\frac{\gamma}{i\omega\epsilon} [\mathbf{z}^0 \mathbf{H}_S]. \quad (3.45)$$

Подставляя значение $\gamma = i\omega\sqrt{\epsilon\mu}$, преобразуем написанное соотношение к виду

$$\mathbf{E}_S = \rho_0 [\mathbf{H}_S \mathbf{z}^0], \quad (3.46)$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (3.47)$$

Переходя к скалярным величинам, получим

$$E_S = \rho_0 H_S. \quad (3.48)$$

Отсюда делаем вывод о том, что векторы $\mathbf{E}_S$ и $\mathbf{H}_S$ взаимно-перпендикулярны и образуют правовинтовую тройку с единичным вектором $\mathbf{z}^0$. Это значит, что при повороте ручки буравчика от $\mathbf{E}_S$ к $\mathbf{H}_S$ сам буравчик будет перемещаться вдоль направления $\mathbf{z}^0$ (рис. 3.3). Волновое сопротивление волны TEM равно волновому сопротивлению свободного пространства.

Чтобы изучить распределение каждой из поперечных составляющих $\mathbf{E}_S$ и $\mathbf{H}_S$ в плоскости поперечного сечения, обратимся к мембранным уравнениям (3.18) и (3.20). Поскольку для волны TEM собственное значение $k^2 = 0$, мембранные уравнения переходят в двумерные уравнения Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_S^2 \mathbf{E}'_S &= 0 \\ \nabla_S^2 \mathbf{H}'_S &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.49)$$

Это значит, что векторы $\mathbf{E}'_S$ и $\mathbf{H}'_S$ определяются из тех же уравнений и при тех же граничных условиях, что и векторы электрического и магнитного полей в электростатическом и магнито-

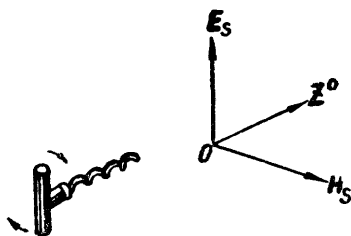


Рис. 3.3. Пояснение взаимного расположения поперечных составляющих поля



Рис. 3.4. Примеры распределения электрического поля в плоскости поперечного сечения при волне TEM

статическом случаях. Поэтому для волны TEM распределение электрического поля между параллельными проводящими плоскостями совпадает с распределением поля плоского конденсатора (рис. 3.4а), распределение электрического поля в поперечном сечении коаксиального кабеля (рис. 3.4б) совпадает с распределе-

нием электростатического поля между проводящими коаксиальными цилиндрами, поперечное электрическое поле двухпроводной линии (рис. 3.4в) совпадает с соответствующим электростатическим полем между двумя параллельными цилиндрическими проводами. Аналогично распределение магнитного поля волны *ТЕМ* в пространстве между проводящими плоскостями или между проводниками коаксиальной и двухпроводной линий совпадает с распределением статического магнитного поля соответствующих поверхностных токов (рис. 3.5).

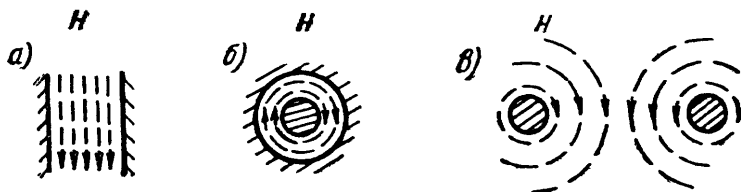


Рис. 3.5. Примеры распределения магнитного поля в плоскости поперечного сечения при волне *ТЕМ*

Изложенная выше аналогия со статикой касалась лишь распределения поля в плоскости поперечного сечения. Закон распределения поля вдоль оси *z* существенно отличается от статического. Вместо однородного распределения *вдоль оси z*, характерного для статического случая, распределение поля при волне *ТЕМ* имеет *волновой характер*. В пределах же поперечного сечения между распределением поля волны *ТЕМ* и распределением статических полей имеется полная аналогия.

Известно, что статические задачи дают решения, отличные от нуля, не при всяких граничных условиях. Так, при отсутствии сторонних зарядов электростатическое поле *не может существовать* внутри полой металлической трубы, поперечное сечение которой представляет односвязную область, поскольку статический режим при наличии разноимённых зарядов на сплошной проводящей поверхности невозможен. В этом отношении полая проводящая труба существенно отличается от коаксиального кабеля. По аналогии можно сделать вывод *о невозможности существования волн ТЕМ в полых проводящих трубах, имеющих односвязное сечение, т. е. если эти трубы не содержат внутреннего проводника*.

Ввиду важности этого вывода, постараемся прийти к нему ещё несколько иначе, не прибегая к аналогии в дифференциальных уравнениях, а исходя из одних только физических соображений. По определению волны *ТЕМ* продольная составляющая магнитного поля $H_z = 0$. Следовательно, линии магнитного поля этой волны *лежат в поперечной плоскости*. Последние, как известно, должны быть *замкнуты*. По закону полного тока они замыкаются либо вокруг токов проводимости, либо вокруг токов смещения.

Однако в случае односвязного сечения линии магнитного поля замкнуться вокруг токов проводимости не могут. При волне типа *ТЕМ* не могут замкнуться они и вокруг токов смещения, так как в любой точке сечения продольная составляющая электрического поля $E_z=0$. Следовательно, магнитное поле не может существовать, и значит, волна *ТЕМ* внутри полой трубы, не содержащей внутреннего проводника, невозможна. Решение для такой трубы может строиться только из волн *H* и *E*.

§ 3.7. ПОПЕРЕЧНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ (*H*) И ПОПЕРЕЧНО-МАГНИТНЫЕ (*E*) ВОЛНЫ. СВОДКА РАСЧЁТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Соотношения (3.25) и (3.26), связывающие продольные и поперечные составляющие, получены для наиболее общего случая, когда имеются обе продольные составляющие E_z и H_z . Эти соотношения необходимо преобразовать применительно к *H* и *E* волнам, для которых одна из продольных составляющих равна нулю.

Начнём с *поперечно-электрических* волн *H*, когда нулю равна продольная составляющая электрического поля. Полагая в соотношениях (3.26) и (3.25) $E_z=0$, приходим к более простым соотношениям:

$$-k^2 \mathbf{H}_S = \gamma \operatorname{grad}_S H_z, \quad (3.50)$$

$$-k^2 \mathbf{E}_S = i \omega \mu [\operatorname{grad}_S H_z \mathbf{z}^0]. \quad (3.51)$$

Соотношение (3.50) позволяет выразить $\operatorname{grad}_S H_z$ через $\mathbf{H}_S$. Подставляя это выражение в (3.51), получим

$$\mathbf{E}_S = \frac{i \omega \mu}{\gamma} [\mathbf{H}_S \mathbf{z}^0] = \rho_H [\mathbf{H}_S \mathbf{z}^0], \quad (3.52)$$

где

$$\rho_H = \frac{i \omega \mu}{\gamma}. \quad (3.53)$$

Из ф-лы (3.52) видно, что векторы $\mathbf{E}_S$ и $\mathbf{H}_S$ взаимно-перпендикулярны и образуют с единичным вектором $\mathbf{z}^0$ правовинтовую тройку (рис. 3.3). Соотношение (3.53) определяет волновое сопротивление для волны *H*, такое же, как и для соответствующей волны между параллельными плоскостями. Переходя в соотношении (3.52) к скалярным величинам, получим $E_S = \rho_H H_S$, т. е.

$$\rho_H = \frac{E_S}{H_S}.$$

Расчётные соотношения для поперечно-электрических волн *H* сведены в левом столбце табл. 3.1.

Перейдём к *поперечно-магнитным* волнам E . Полагая в соотношениях (3.25) и (3.26) $H_z = 0$, получим:

$$-k^2 E_S = \gamma \operatorname{grad}_S E_z, \quad (3.54)$$

$$+k^2 H_S = i \omega \epsilon [\operatorname{grad}_S E_z z^0], \quad (3.55)$$

отсюда

$$H_S = -\frac{i \omega \epsilon}{\gamma} [E_S z^0] = \frac{1}{\rho_E} [z^0 E_S], \quad (3.56)$$

где

$$\rho_E = \frac{\gamma}{i \omega \epsilon}. \quad (3.57)$$

Как и в предыдущем случае, векторы E_S и H_S *перпендикулярны между собой и образуют с единичным вектором z^0 правовинтовую тройку* (рис. 3.3). Переходя к скалярным величинам, имеем

$$H_S = \frac{1}{\rho_E} E_S.$$

Величина ρ_E , равная отношению поперечных составляющих поля, представляет собой волновое сопротивление волны E .

Основные расчётные соотношения для волн E приведены в правом столбце табл. 3.1. В табл. 3.1 включены также граничные условия для E_z и H_z , которые, в отличие от остальных соотношений левого и правого столбцов, не двойственны между собой.

Таблица 3.1

Волны H	Волны E
$H_z = H'_z(x, y)e^{i\omega t - \gamma z}$ $E_z = 0$	$E_z = E'_z(x, y)e^{i\omega t - \gamma z}$ $H_z = 0$
$\nabla_S^2 H'_z + k^2 H'_z = 0$ $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ на контуре C	$\nabla_S^2 E'_z + k^2 E'_z = 0$ $E'_z = 0$ на контуре C
$\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu$	$\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu$
$H_S = -\frac{\gamma}{k^2} \operatorname{grad}_S H_z$	$E_S = -\frac{\gamma}{k^2} \operatorname{grad}_S E_z$
$E_S = \rho_H [H_S z^0],$ где $\rho_H = \frac{i \omega \mu}{\gamma}$	$H_S = \frac{1}{\rho_E} [z^0 E_S],$ где $\rho_E = \frac{\gamma}{i \omega \epsilon}$

§ 3.8. О ВЕЩЕСТВЕННОМ ХАРАКТЕРЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ МЕМБРАННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НУЛЕВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Можно убедиться, что при произвольной форме контура S собственные числа k мембранного уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0$$

являются вещественными, если на контуре заданы нулевые граничные условия ($\psi = 0$ или $\partial \psi / \partial n = 0$). Последнее обстоятельство играет важную роль, поскольку определяет существование критических частот для волн E и H , когда в качестве функции $\psi(x, y)$ выступает функция $E'_z(x, y)$ или функция $H'_z(x, y)$, а в качестве контура S — контур поперечного сечения волновода.

Доказательство основывается на известной из математики формуле Грина, которая применительно к двумерному случаю записывается так

$$\int_S (\text{grad } \varphi \text{ grad } \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dS = \oint_C \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl, \quad (3.58)$$

где $\varphi = \varphi(x, y)$ и $\psi = \psi(x, y)$ — функции двух переменных.

Здесь интегралы берутся соответственно по площади, охватываемой контуром, и по самому контуру S . Поскольку $\psi(x, y)$ является лишь функцией координат поперечного сечения, то обозначения ∇ и ∇_S равноценны. Вывод двумерного варианта формулы Грина приведён в приложении 3.2.

Пусть $\psi(x, y)$ есть решение мембранного уравнения, при котором $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$. Полагаем далее, что функция $\varphi(x, y)$ является комплексно сопряжённой с функцией $\psi(x, y)$, т. е. $\varphi = \psi^*$. При этом $\text{grad } \varphi = (\text{grad } \psi)^*$. Поскольку при любом из двух заданных граничных условий правая часть соотношения (3.58) обращается в нуль, то после указанных замен получим

$$\int_S (|\text{grad } \psi|^2 - k^2 |\psi|^2) dS = 0.$$

Здесь $|\psi|$ и $|\text{grad } \psi|$ — модули функции $\psi(x, y)$ и её градиента соответственно. Отсюда

$$k^2 = \frac{\int_S |\text{grad } \psi|^2 dS}{\int_S |\psi|^2 dS}. \quad (3.59)$$

Ввиду того что подынтегральные выражения в соотношении (3.59) вещественны и не могут в любой точке x, y принимать отрицательного значения, число k^2 будет всегда положительным или равным нулю, а это и значит, что числа k должны иметь вещественные значения.

§ 3.9. ПОСТОЯННАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ, ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН H И E В ВОЛНОВОДАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ

Постоянная распространения γ рассчитывается по формуле

$$\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu, \quad (3.60)$$

где для волновода без потерь k — вещественное число.

Формула (3.60) совпадает с соответствующей ф-лой (2.50) для волн между плоскостями. Поэтому ряд выводов второй главы сразу распространяется на волноводы произвольной формы сечения. Из ф-лы (3.60) видно, что для волновода без потерь квадрат постоянной распространения также является вещественным числом. Сама постоянная распространения γ может быть вещественной, мнимой или равной нулю в зависимости от частоты ω . Частота ω , при которой постоянная распространения обращается в нуль, называется критической частотой волновода

$$\omega_{кр} = \frac{k}{\sqrt{\epsilon \mu}} = kv, \quad (3.61)$$

где v — скорость света в данной среде. Значение k определяется из решения мембранного уравнения для заданной формы контура поперечного сечения волновода.

Все следствия из ф-лы (3.60), которые были получены при рассмотрении её в гл. 2, непосредственно распространяются на волноводы произвольной формы сечения. Сюда относятся выражение (2.54) для фазовой постоянной α при $\omega > \omega_{кр}$ и выражение (2.56) для постоянной затухания при $\omega < \omega_{кр}$. Наряду с критической частотой, можно ввести критическую длину волны

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} \frac{2\pi}{k}, \quad (3.62)$$

как длину волны в свободном пространстве, соответствующую критической частоте. При частоте выше критической справедлива формула для расчёта длины волны в волноводе

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (3.63)$$

Без изменения остались и выражения для волновых сопротивлений ρ_H и ρ_E . В частности, при $\omega > \omega_{кр}$ волновое сопротивление активно и равно:

$$\rho_H = \rho_0 \frac{\lambda_g}{\lambda}, \quad (3.64)$$

$$\rho_E = \rho_0 \frac{\lambda}{\lambda_g}. \quad (3.65)$$

Поскольку выражение (2.54) для фазовой постоянной сохраняется, то сохраняются и выражения (2.82) и (2.118) для фазовой и групповой скоростей. Скорость переноса энергии, как это показывается ниже, по-прежнему совпадает с групповой скоростью.

Особенности различных типов волноводов сказываются на характере распределения поля в плоскости поперечного сечения, на распределении критических частот, но не на законе распределения поля вдоль оси волновода.

Скоростью переноса энергии можно, как и ранее, назвать отношение мощности P , переносимой через поперечное сечение, к среднему количеству энергии W , приходящемуся на единицу длины волновода. При использовании записи в комплексной форме

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_{\text{попер}}} [\mathbf{E}_S \mathbf{H}_S^*]_z dS \quad (3.66)$$

и

$$W = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{попер}}} \left\{ \frac{\epsilon (|E_S|^2 + |E_z|^2)}{2} + \frac{\mu (|H_S|^2 + |H_z|^2)}{2} \right\} dS. \quad (3.67)$$

Покажем на примере волны H , что в волноводе без потерь при частоте выше критической скорость переноса энергии равна групповой скорости. В этом случае:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_S &= \frac{i\alpha}{k^2} \operatorname{grad}_S H_z, \quad \mathbf{E}_S = \frac{i\omega\mu}{k^2} [\operatorname{grad}_S H_z \mathbf{z}^0], \\ [\mathbf{E}_S \mathbf{H}_S^*] &= \frac{\alpha\omega\mu}{k^4} |\operatorname{grad}_S H_z|^2. \end{aligned}$$

Учитывая в соотношениях (3.66) и (3.67), что $E_z = 0$, и используя соотношение

$$\frac{\int_{S_{\text{попер}}} |\operatorname{grad}_S H_z|^2 dS}{\int_{S_{\text{попер}}} |H_z|^2 dS} = k^2,$$

вытекающее из более общего соотношения (3.59), найдём

$$v_g = \frac{\frac{1}{2} \frac{\alpha\omega\mu}{k^4} k^2}{\frac{\epsilon}{4} \left(\frac{\omega\mu}{k^2}\right)^2 + \frac{\mu}{4} \left(\frac{d}{k^2}\right)^2 k^2 + \frac{\mu}{2}} = \frac{2\alpha\omega}{\omega^2 \epsilon \mu + \alpha^2 + k^2}. \quad (3.68)$$

Заменяя $\alpha^2 = k^2 + \omega^2 \epsilon \mu$, получим

$$v_g = \frac{\alpha}{\omega \epsilon \mu} = \frac{\frac{1}{\epsilon \mu}}{\frac{\omega}{\alpha}} = \frac{v^2}{v_\phi} = v_{gp}. \quad (3.69)$$

§ 4.1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Прямоугольные волноводы являются в настоящее время наиболее распространённым видом волноводов. Достоинствами прямоугольных волноводов по сравнению с другими видами волноводов, например по сравнению с круглыми, являются меньшее влияние деформаций стенок на структуру поля в волноводе и больший диапазон рабочих длин волн.

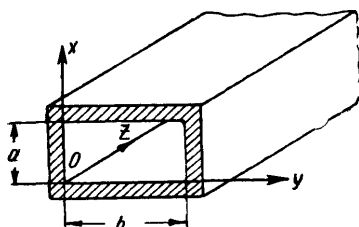


Рис. 4.1. Прямоугольный волновод

Приступая к анализу прямоугольных волноводов, условимся пользоваться прямоугольной системой координат x, y, z и выберем обозначения сторон, показанные на рис. 4.1. Проводимость стенок, если это специально не оговаривается, будем считать бес-

конечной, потерями в диэлектрике пренебрегаем. Анализу подлежат решения двух типов — H и E , поскольку, согласно результатам предыдущей главы, решения типа TEM в данном случае существовать не могут. Расчёт полей H и E начнём с решения мембранного уравнения для плоскости S поперечного сечения волновода при нулевых граничных условиях на контуре C этого сечения.

§ 4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ МЕМБРАННОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Для расчёта полей в волноводе необходимо определить частные решения мембранного уравнения

$$\nabla^2 \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0. \quad (4.1)$$

при заданных нулевых граничных условиях на контуре C поперечного сечения (рис. 4.2):

$$1) \psi = 0 \text{ на контуре } C \quad (4.2)$$

или же

$$2) \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ на контуре } C. \quad (4.3)$$

Первый вариант граничных условий используется при анализе волн E , когда $\psi = E_z(x, y)$, второй вариант — при анализе волн H , когда $\psi = H_z(x, y)$. Методика решения мембранного уравнения известна из математики.

Используя метод разделения переменных, частное решение выбираем в виде произведения двух независимых функций, каждая из которых является функцией одной независимой переменной

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (4.4)$$

Подставляя значение (4.4) функции $\psi(x, y)$ в ур-ние (4.1), получим

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k^2 X(x) Y(y) = 0.$$

Поделив найденное равенство почленно на произведение $X(x)Y(y)$, можно преобразовать его к виду

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k^2 = 0 \quad (4.5)$$

или

$$f_1(x) + f_2(y) = -k^2. \quad (4.6)$$

Дифференцируя соотношение (4.6) по x и замечая, что y и x — независимые переменные, можно получить $\frac{df_1}{dx} = 0$, т. е. что $f_1(x) = \text{const}$. Подобным же образом $\frac{df_2}{dy} = 0$ и $f_2(y) = \text{const}^1$. Обозначая постоянные

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_y^2, \quad (4.8)$$

¹⁾ Тот же вывод можно сделать, исходя от противного. Если выражения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ не равны константам, то ур-ния (4.5) и (4.6) устанавливают связь между независимыми переменными x и y , что невозможно.

²⁾ В правой части равенств (4.7) и (4.8) можно было бы поставить и знак плюс. Величины k_x и k_y будут тогда мнимыми, а конечный результат останется неизменным.

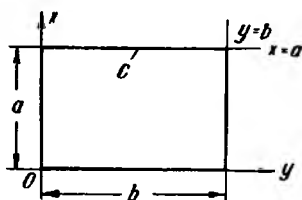


Рис. 4.2. Прямоугольный контур

где

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2, \quad (4.9)$$

разбиваем дифференциальное уравнение в частных производных (4.1) на два обыкновенных дифференциальных уравнения (4.7) и (4.8), которые иначе могут быть записаны так:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0. \quad (4.11)$$

Решения этих дифференциальных уравнений имеют вид:

$$X(x) = A_1 \cos k_x x + B_1 \sin k_x x, \quad (4.12)$$

$$Y(y) = A_2 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y. \quad (4.13)$$

Проанализируем полученные решения для каждого из двух рассматриваемых вариантов граничных условий решаемой задачи.

1. Граничное условие $\psi(x, y) = 0$ на контуре C .

Поскольку прямоугольный контур (рис. 4.2) образован прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$, граничное условие можно записать в виде:

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) = 0 \text{ при } x = 0, x = a, y = 0, y = b$$

или

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(x)Y(0) = 0, \quad (4.14)$$

$$X(a)Y(y) = 0, \quad X(x)Y(b) = 0.$$

Ввиду того что функции $X(x)$ и $Y(y)$ не могут быть равны нулю при всех значениях своих аргументов (что означало бы отсутствие поля), граничные условия (4.14) следует представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(a) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} Y(0) &= 0 \\ Y(b) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.16)$$

Используя найденное ранее выражение для функции $X(x)$, систему соотношений (4.15) преобразуем к виду $A_1 = 0, B_1 \sin k_x a = 0$.

Поскольку $B_1 \neq 0$ (иначе решение системы не имеет смысла), находим, что $\sin k_x a = 0$, откуда, в свою очередь, $k_x a = m\pi$, т. е.

$$k_x = \frac{m\pi}{a} (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.17)$$

В результате выражение для функции $X(x)$ находим в виде

$$X(x) = B_1 \sin \frac{m\pi}{a} x. \quad (4.18)$$

Подобным же образом находим функцию

$$Y(y) = B_2 \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (4.19)$$

что соответствует значению

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.20)$$

Искомое решение мембранного уравнения при граничном условии $\psi = 0$ на контуре C имеет вид

$$\psi(x, y) = B \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (4.21)$$

Оно получается при собственном значении

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (4.22)$$

причём в соответствии с изложенным ранее в гл. 3 число k^2 должно быть больше нуля.

2. Граничное условие $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ на контуре C .

Дифференцирование по нормали к контуру (рис. 4.2) сводится к дифференцированию по координатам x или y . Тогда для прямых $x = 0$ и $x = a$ граничное условие можно записать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{dX(x)}{dx} Y(y) = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a;$$

для прямых $y = 0$ и $y = b$ соответственно получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = X(x) \frac{dY(y)}{dy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b.$$

Поскольку функции $Y(y)$ и $X(x)$ не могут быть равны нулю при всех значениях своих аргументов, то:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX(0)}{dx} &= 0 \\ \frac{dX(a)}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY(0)}{dy} &= 0 \\ \frac{dY(b)}{dy} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.24)$$

Замечая, что

$$\frac{dX(x)}{dx} = -A_1 k_x \sin k_x x + B_1 k_x \cos k_x x,$$

из соотношений (4.23) получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B_1 k_x &= 0 \\ (-A_1 \sin k_x a + B_1 \cos k_x a) k_x &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.25)$$

Система удовлетворяется при $B_1 = 0$ и $\sin k_x a = 0$. Тогда

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.26)$$

и

$$X(x) = A_1 \cos \frac{m\pi}{a} x. \quad (4.27)$$

Подобным же образом

$$Y(y) = A_2 \cos \frac{n\pi}{b} y, \quad (4.28)$$

что соответствует значению

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.29)$$

Искомое решение мембранного уравнения при граничном условии $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ на контуре C имеет вид

$$\psi(x, y) = A \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y. \quad (4.30)$$

Оно соответствует собственному значению

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (4.31)$$

В соответствии с изложенным в гл. 3 число $k^2 > 0$.

§ 4.3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ВОЛН E И H

Выражения для продольной составляющей поля волн E

В случае волн типа E продольная составляющая магнитного поля H_z равна нулю. Продольная составляющая электрического поля E_z отлична от нуля и, согласно изложенному в гл. 3, определяется выражением

$$E_z = E'_z(x, y) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (4.32)$$

где $E'_z(x, y)$ — решение мембранного уравнения с нулевыми значениями на контуре C волновода. Согласно результатам предыдущего параграфа,

$$E'_z(x, y) = B \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (4.33)$$

Коэффициент B , характеризующий интенсивность поля, определяется условиями возбуждения колебаний или величиной мощности, переносимой волной.

Соотношения (4.32), (4.33) показывают, что *распределение продольной составляющей электрического поля в плоскости поперечного сечения подчиняется закону стоячей волны, а распределение поля вдоль оси z при $\gamma = i\alpha$ — закону бегущей волны.* Целые числа m и n характеризуют количество стоячих полуволн поля, которые укладываются вдоль сторон волновода a и b соответственно. В зависимости от числа полуволн, которые укладываются вдоль сторон волновода, поля типа E обозначаются E_{mn} .

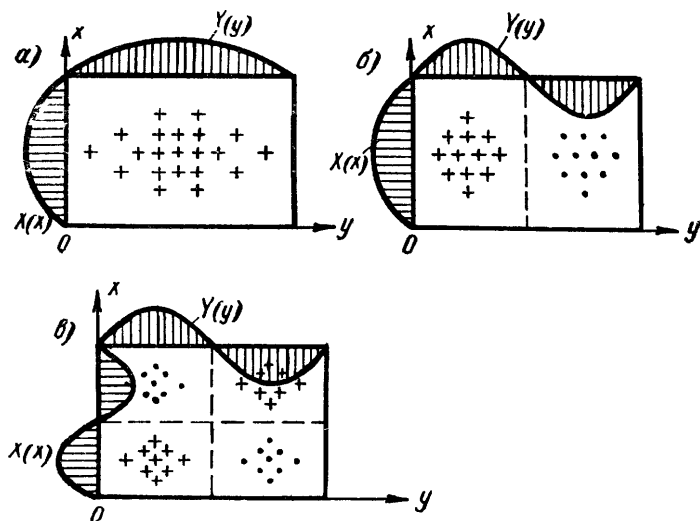


Рис. 4.3. Распределение продольной составляющей электрического поля E_z в плоскости поперечного сечения для волн E_{11} (а), E_{12} (б), E_{22} (в)

Примеры распределения продольной составляющей электрического поля показаны на рис. 4.3, где по осям x и y нанесены кривые $X(x)$ и $Y(y)$ для полей E_{11} ($m=n=1$) и E_{12} ($m=1, n=2$) и E_{22} ($m=n=2$). При построении кривых положительные значения функций распределения $X(x)$ и $Y(y)$ откладывались наружу от прямоугольного контура. Результирующее направление продольной составляющей электрического поля E_z выбиралось в соответствии со знаком произведения функций $X(x)$ и $Y(y)$. Сечения линий поля изображались в виде крестиков там, где $E_z > 0$, и в виде точек — там, где $E_z < 0$.

Представленные на рис. 4.3 распределения продольной составляющей электрического поля по осям координат совпадают с распределениями прогибов прямоугольной мембраны, закреплённой

по краям прямоугольного контура, для соответствующих типов её колебаний.

Индексы m и n , характеризующие число стоячих полуволн поля, могут принимать произвольные целые значения, но *должны быть отличны от нуля*. Волна типа E с каким-либо нулевым индексом невозможна, поскольку в силу соотношения (4.2) при этом всюду $E'_z = 0$.¹⁾

Выражение для продольной составляющей поля волн H

Перейдём к волнам типа H . Продольный компонент электрического поля E_z этих волн по определению тождественно равен нулю, а продольный компонент магнитного поля H_z отличен от нуля и определяется соотношением

$$H_z = H'_z(x, y) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (4.34)$$

где, согласно результатам предыдущего параграфа,

$$H'_z(x, y) = A \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y. \quad (4.35)$$

Как и в предыдущем случае, распределение поля в плоскости поперечного сечения подчиняется *закону стоячей волны*, а распределение поля вдоль оси волновода при $\gamma = i\alpha$ — *закону бегущей волны*. Целые числа m и n характеризуют, как и ранее, количество стоячих полуволн, которые укладываются по сторонам поперечного сечения. В зависимости от этих чисел *решения обозначаются* H_{mn} . В отличие от волн E_{mn} возможны волны H_{mn} с *одним нулевым индексом*. Как видно из соотношения (4.35), продольная составляющая магнитного поля при этом не обращается в нуль, если $A \neq 0$. Распределение поля вдоль стороны волновода, которой соответствует нулевой индекс, *оказывается постоянным*.

Примеры полей H_{mn} показаны на рис. 4.4, где представлено распределение продольной составляющей магнитного поля по осям координат для волн H_{01} ($m = 0, n = 1$), H_{10} ($m = 1, n = 0$), H_{11} ($m = n = 1$), H_{12} ($m = 1, n = 2$) и нанесены поперечные сечения линий магнитного поля в виде крестиков там, где $H'_z > 0$, и в виде точек — там, где $H'_z < 0$.

Характерным для представленных на рис. 4.4 распределений является то, что продольная составляющая магнитного поля H_z

¹⁾ Иначе говоря, нулевой индекс показывает, что продольная составляющая E_z должна быть неизменной вдоль одной из осей x или y плоскости поперечного сечения, а это возможно только, если её значение *всюду равно граничному значению* $E'_z = 0$.

имеет у стенок экстремальное значение или же (при соответствующем нулевом индексе) не меняется по нормали к одной из проводящих стенок. Указанная особенность в распределении поля связана с протеканием поверхностных токов по стенкам, а с расчётной точки зрения определяется граничным условием $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ на контуре C .

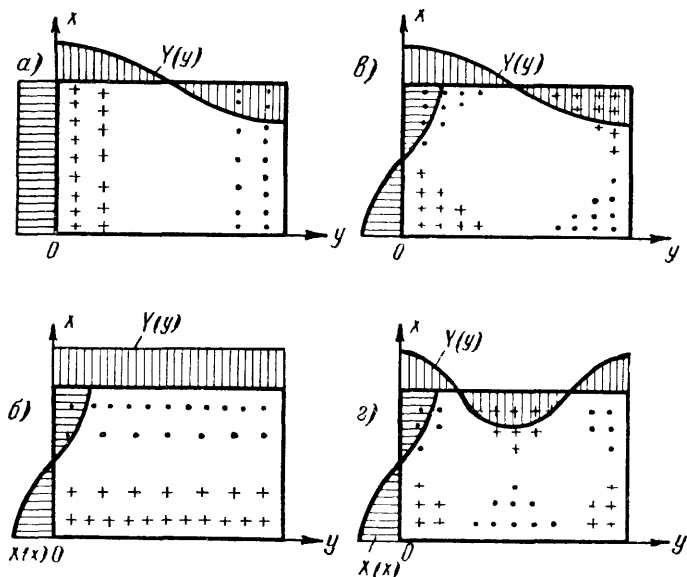


Рис. 4.4. Распределение продольной составляющей магнитного поля H_z в плоскости поперечного сечения для волн H_{01} (а), H_{10} (б), H_{11} (в), H_{12} (г)

В то время как в отличие от волн E возможны решения типа H с одним нулевым индексом, решения H с двумя нулевыми индексами существовать не могут. Таким решениям соответствовало бы равномерное распределение поля по сечению, характерное для плоской однородной волны. Последняя принадлежит к классу волн TEM и не может иметь места внутри полых проводящей трубы.

Выражения для поперечных составляющих поля волн E

Поперечная составляющая электрического поля волн E в силу соотношения (3.54) следующим образом выражается через продольную:

$$E_s = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad}_s E_z. \quad (4.36)$$

Переходя к проекциям этой составляющей, получим:

$$E_x = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{m\pi}{a} B \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (4.37)$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{n\pi}{b} B \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (4.38)$$

Поперечная составляющая магнитного поля рассчитывается по ф-ле (3.56)

$$\mathbf{H}_S = \frac{1}{\rho_E} [\mathbf{z}^0 \mathbf{E}_S]. \quad (4.39)$$

Чтобы найти проекции вектора $\mathbf{H}_S$ на оси координат, достаточно заменить в ф-ле (4.39) вектор $\mathbf{E}_S$ через его проекции на оси координат

$$\mathbf{E}_S = E_x \mathbf{x}^0 + E_y \mathbf{y}^0$$

и выполнить векторное умножение $[\mathbf{z}^0 \mathbf{x}^0] = \mathbf{y}^0$, $[\mathbf{z}^0 \mathbf{y}^0] = -\mathbf{x}^0$.

Тогда получим

$$\mathbf{H}_S = \frac{1}{\rho_E} (-E_y \mathbf{x}^0 + E_x \mathbf{y}^0).$$

Проекции поперечной составляющей вектора магнитного поля на оси координат определяется так:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{1}{\rho_E} E_y \\ H_y &= \frac{1}{\rho_E} E_x \end{aligned} \right\}. \quad (4.40)$$

Выражения для поперечных составляющих поля волн H

Поперечную составляющую магнитного поля $\mathbf{H}_S$ в соответствии с полученным ранее соотношением (3.50) можно определить, как

$$\mathbf{H}_S = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad}_S H_z. \quad (4.41)$$

Переходя к проекциям, найдём:

$$H_x = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{m\pi}{a} A \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (4.42)$$

$$H_y = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{n\pi}{b} A \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (4.43)$$

Поперечная составляющая электрического поля определяется по ф-ле (3.52)

$$\mathbf{E}_S = \rho_H [\mathbf{H}_S \mathbf{z}^0]. \quad (4.44)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_S &= H_x \mathbf{x}^0 + H_y \mathbf{y}^0, \\ [\mathbf{x}^0 \mathbf{z}^0] &= -\mathbf{y}^0, [\mathbf{y}^0 \mathbf{z}^0] = \mathbf{x}^0, \end{aligned}$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \rho_H H_y \\ E_y &= -\rho_H H_x \end{aligned} \right\}. \quad (4.45)$$

Легко видеть, что для поперечных составляющих поля H_x , H_y , E_x и E_y , как и для продольных составляющих E_z и H_z , вдоль каждой из сторон контура поперечного сечения волновода укладывается целое число стоячих полуволн поля (соответственно m или n).

Используя полученные математические выражения, можно перейти к более детальному изучению структур полей. Поля будем изучать для распространяющихся волн, т. е. при $\omega > \omega_{кр}$. Изучение начнём с поля волны H_{01} , наиболее простого по конфигурации и представляющего наибольший практический интерес.

§ 4.4. ВОЛНА H_{01} В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ. РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ. СТРУКТУРА ПОЛЯ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СВЯЗИ ПРИ ВОЛНЕ H_{01}

Расчётные соотношения для волны H_{01}

Расчётные соотношения для волны H_{01} легко получаются из приведённых выше соотношений для волн H в прямоугольном волноводе в результате подстановки индексов $m=0$ и $n=1$. Продольная составляющая магнитного поля H_z для волны типа H_{01} определяется соотношением

$$H_z = A \cos \frac{\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (4.46)$$

Поперечные составляющие магнитного поля можно найти из выражений (4.42) и (4.43), полагая $m=0$ и $n=1$ (либо пользуясь выражением (4.46) и выражениями поперечных компонентов через продольные). При этом получим:

$$\left. \begin{aligned} H_y &= -\frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\gamma}{k^2} \frac{\pi}{b} A \sin \frac{\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma z} \\ H_x &= -\frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.47)$$

В силу соотношения (4.31) для волны H_{01} собственное число $k = \frac{\pi}{b}$, так что критическая длина волны определяется выражением

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k} = 2b. \quad (4.48)$$

Ограничиваясь изучением распространяющейся волны ($\lambda < \lambda_{кр}$), когда $\gamma = i\alpha = i\frac{2\pi}{\lambda_g}$, и заменяя в соотношении (4.47) величины γ и k их значениями, несколько преобразуем выражение для поперечной составляющей магнитного поля

$$H_y = i \frac{2b}{\lambda_g} A \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)}. \quad (4.49)$$

Для поперечных составляющих электрического поля соответственно будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \rho_H H_y = i \rho_H A \frac{2b}{\lambda_g} \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ E_y &= -\rho_H H_x = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.50)$$

Обозначая комплексный коэффициент при составляющей электрического поля E_x

$$i \rho_H A \frac{2b}{\lambda_g} = \dot{E}_{xm}$$

и выражая через него коэффициенты A , найдём:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \dot{E}_{xm} \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ H_y &= \frac{\dot{E}_{xm}}{\rho_H} \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ H_z &= -i \frac{\dot{E}_{xm}}{\rho_H} \frac{\lambda_g}{2b} \cos \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.51)$$

Возьмём от написанных комплексных выражений реальную часть, заменив комплексную величину $\dot{E}_{xm} = E_{xm} e^{i\theta}$ через модуль и аргумент. Полагая для простоты аргумент θ равным нулю ¹⁾, получим:

¹⁾ Если аргумент θ не полагать равным нулю или, например, если положить равным нулю аргумент $A = \dot{H}_{zm}$, а не аргумент $\dot{E}_{xm}$, изменится лишь постоянная фаза тригонометрических функций времени.

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{xm} \sin \frac{\pi}{b} y \cos (\omega t - \alpha z) \\ H_y &= \frac{E_{xm}}{\rho_H} \sin \frac{\pi}{b} y \cos (\omega t - \alpha z) \\ H_z &= \frac{E_{xm}}{\rho_H} \frac{\lambda_g}{2b} \cos \frac{\pi}{b} y \sin (\omega t - \alpha z) \\ E_y &= E_z = H_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Найденные выше соотношения (4.51) и (4.52) полностью совпадают с соответствующими соотношениями гл. 2 для волны H_n между параллельными плоскостями при $n=1$. Это связано с тем, что волна H_{01} непосредственно получается из волны H_1 , если перпендикулярно двум параллельным плоскостям, направляющим распространение электромагнитной энергии, поставить ещё две проводящие плоскости нормально линиям электрического поля.

Структура поля волны H_{01}

Структура поля волны H_{01} , соответствующая приведённым выше соотношениям, представлена на рис. 4.5. Поскольку имеется единственная составляющая электрического поля E_x вдоль оси x , то линии электрического поля, изображённые на рисунке (сплошные линии), идут параллельно этой оси. Распределение поля вдоль оси y соответствует закону стоячей волны, причём вдоль стороны волновода b укладывается одна стоячая полуволна поля. Вдоль оси z поле распределено по закону бегущей волны, которая перемещается с фазовой скоростью

$$v_{\phi} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (4.53)$$

Длина волны в волноводе отлична при этом от длины волны в свободном пространстве

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (4.54)$$

а отношение $\frac{v_{\phi}}{\lambda_g} = \frac{v}{\lambda}$ равно частоте колебаний генератора f .

При изучении картин полей, как было показано в гл. 2, полезно ввести в рассмотрение *вектор плотности тока смещения*, т. е., иначе говоря, вектор скорости изменения во времени электрической индукции $\mathbf{D}$. Для волны H_{01} в прямоугольном волноводе выражение вектора плотности тока смещения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{см} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i \omega \varepsilon E_{xm} \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z)} \mathbf{x}^0 = \\ &= \omega \varepsilon E_{xm} \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - \alpha z + \frac{\pi}{2})} \mathbf{x}^0. \end{aligned}$$

В соответствии с написанным выражением картина распределения тока смещения в волноводе *повторяет* картину распределения электрического поля. Во времени ток смещения, как ёмкостный ток, изменяется по отношению к электрическому полю с опережением на четверть периода, т. е. со сдвигом по фазе на $\frac{\pi}{2}$.

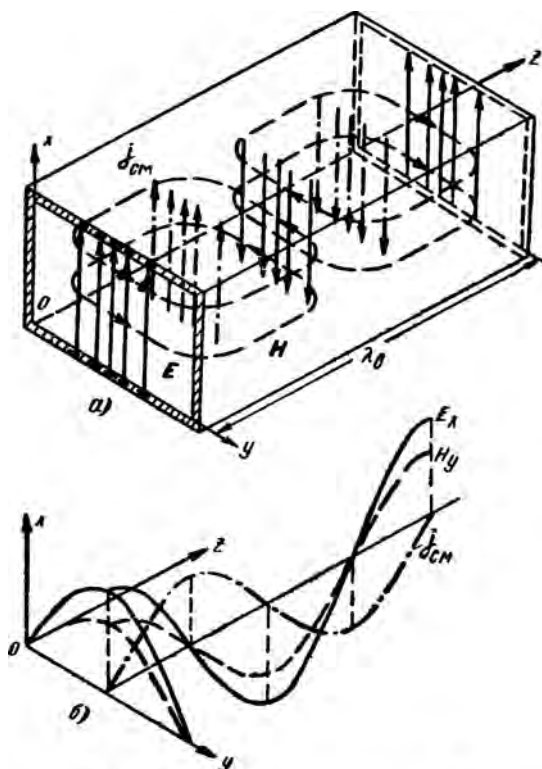


Рис. 4.5. Структура поля волны H_{01}

Поскольку распределение всех составляющих поля вдоль оси z соответствует закону бегущей волны, то опережение во времени на четверть периода, как указывалось уже ранее, эквивалентно сдвигу в пространстве на четверть длины волны в волноводе. Таким образом, картина распределения тока смещения вдоль оси z оказывается *сдвинутой* по отношению к картине электрического поля на *четверть длины волны в волноводе* в сторону движения волны. На рис. 4.5а показаны линии тока смещения (штрихпунктир), что позволяет быстро согласовать распределение магнитного поля с распределением электрического поля. Как видно из рисунка, линии магнитного поля представляют собой замкнутые кривые, окружающие линии токов смещения, а направле-

ние магнитных линий согласуется с направлением токов смещения в соответствии с правилом буравчика.

В полученной картине электромагнитного поля характерным является то, что плоскости, в которых поперечная составляющая электрического поля имеет максимальное значение, являются одновременно плоскостями максимального значения поперечной составляющей магнитного поля. Указанное свойство электромагнитного поля характеризует активный характер волнового сопротивления при $\omega > \omega_{кр}$.

Нетрудно проверить, что распределение поля, представленное на рис. 4.5, удовлетворяет всем граничным условиям на идеально проводящей поверхности. В соответствии с граничными условиями линии электрического поля идут нормально, а линии магнитного поля — касательно к идеально проводящей поверхности стенок. На стенках волновода при этом наводятся электрические заряды с плотностью

$$q_S = \varepsilon E_n, \quad (4.55)$$

положительные там, откуда линии электрического поля выходят, отрицательные там, куда они входят. Распределение поверхностных зарядов показано на рис 4.5а (в сечении). По стенкам текут поверхностные токи

$$j_S = [n H,] = [n H], \quad (4.56)$$

которые замыкаются через токи смещения (рис. 4.6б).

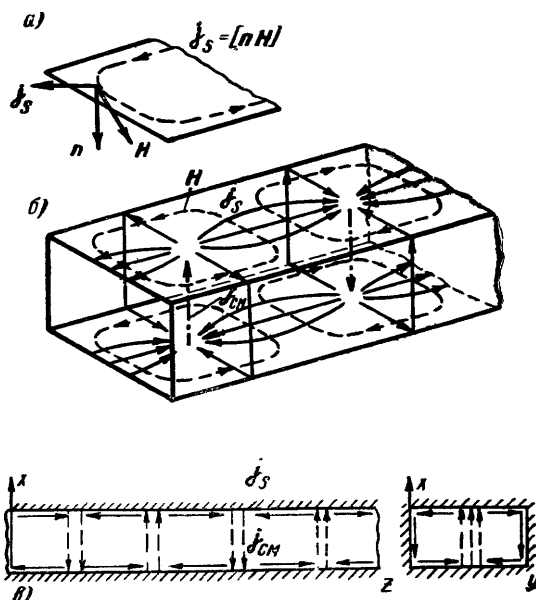


Рис. 4.6. Поверхностные токи волны H_{01} и распределение токов смещения

Картина поверхностных токов показана на рис. 4.6б. Замыкаясь через токи смещения, поверхностные токи образуют замкнутые кольца полного тока. Для поперечной и продольной плоскостей волновода кольца полного тока показаны на рис. 4.6в.

Вдоль оси волновода картина поля повторяется через каждую длину волны в волноводе λ_g . Чем ближе длина волны генератора λ к критической, тем больше λ_g , тем сильнее растягивается картина поля вдоль оси z . Картина поля волны H_{01} в целом сходна с картиной поля в ленточной линии с включёнными в неё металлическими изоляторами (рис. 1.7в).

Использование элементов связи при волне H_{01}

Изложенные здесь сведения о структуре поля волны H_{01} в прямоугольном волноводе позволяют сделать ряд важных выводов относительно расположения элементов связи с волноводом при использовании волны этого типа.

К числу элементов связи с волноводом относятся: *штыри* (линейные штыревые антенны в волноводе), *витки* (рамочные антенны в волноводе) и *щели*, прорезанные в стенках волновода. Если элементы связи служат для приёма (вывода) энергии из волновода, их называют *приёмными (выводными)* элементами. Если же эти элементы служат для возбуждения электромагнитных колебаний (т. е. для ввода энергии в волновод), их называют *возбуждающими (вводными)* элементами.

Приёмные штырь и виток часто используются при экспериментальном изучении структуры поля в волноводах, особенно приёмный штырь. Под действием электромагнитной волны в приёмном штыре (витке) наводится эдс¹⁾. В частности, эдс, наводимая в штыре, будет наибольшей, если штырь ориентирован *вдоль линий электрического поля* и располагается *в пучности электрического поля*. Наводимая в витке эдс будет наибольшей, если плоскость витка ориентирована *перпендикулярно линиям магнитного поля*, а сам виток расположен *в пучности магнитного поля*. Перемещая приёмный штырь или виток вдоль волновода и меняя их ориентацию, можно *экспериментально исследовать распределение поля в волноводе*.

На рис. 4.7 показано использование для этой цели приёмного штыря. Между штырём и корпусом волновода присоединяется кристаллический детектор, постоянная составляющая тока которого проходит через магнитоэлектрический прибор. Штырь перемещают вдоль одной из щелей, прорезанных в стенке волновода. Щели делают при этом весьма узкими и прикрывают сверху проводящими пластинами, чтобы избежать излучения энергии из вол-

¹⁾ Элемент связи, помещённый в электромагнитное поле, представляет по отношению к внешней цепи активный двухполюсник, который заменяется последовательно включёнными сопротивлением и эдс. Об этой эдс и можно говорить как об эдс, наводимой полем.

новода во внешнее пространство. Поскольку для экспериментальных работ обычно используются маломощные генераторы, то детектирование часто имеет квадратичный характер. Это значит, что ток прибора оказывается пропорциональным квадрату амплитуды напряжённости электрического поля в месте расположения штыря. Тогда при перемещении штыря вдоль поперечной щели *A* (рис. 4.7а) показания прибора меняются пропорционально $\sin^2 \frac{\pi}{b} y$.

При перемещении же штыря-зонда по продольной щели *B* (рис. 4.7б) для рассмотренного на рис. 4.5 режима работы (когда отсутствует отражённая волна в волноводе) показания прибора не меняются¹⁾.

Приёмные витки используются для исследования поля значительно реже, чем штыри. Последнее объясняется двумя причинами. во-первых, при одинаковых размерах витки обеспечивают более слабую связь с полем волновода, что нежелательно при передаче мощности; во-вторых, при несимметричном подключении нагрузки к витку (один конец витка заземлен) виток реагирует не только на магнитное, но и на электрическое поле в волноводе.

На примере рис. 4.7 мы уже познакомились с одним и притом простейшим использованием щелей в стенках волновода, а именно с использованием их в целях исследования поля. Наряду с этим, как уже указывалось выше, щели часто прорезаются для излучения энергии из волновода или для ввода её в волновод, т. е. для энергетической связи с волноводом. Рассмотренная нами ранее картина распределения поверхностных токов по стенкам (рис. 4.6) позволяет легко разобраться в важном вопросе о том, в каких случаях возможна и в каких невозможна такая энергетическая связь.

На рис. 4.8а показаны четыре щели *A*, *B*, *B*, *Г*, прорезанные в стенках волновода, по которому передаётся электромагнитная энергия. Продольная щель *A* прорезана перпендикулярно линиям тока. Поскольку щель перерезает линии тока, на её краях вводятся заряды (рис. 4.8б) и, следовательно, в щели создаётся электрическое поле. Направление вектора электрического поля *E*

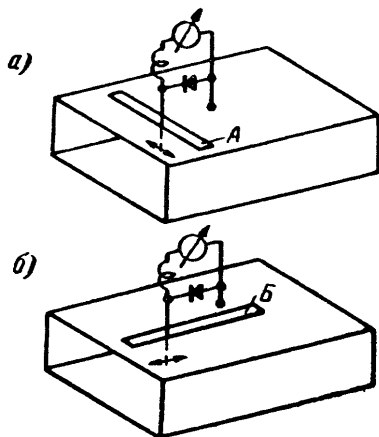


Рис 4 7. Штыри для исследования поля в волноводе

¹⁾ Следует помнить, что распределение составляющих поля вдоль волновода, показанное ранее на рис. 4.5б, характеризует не амплитудные, а мгновенные значения.

в щели перпендикулярно вектору магнитного поля $\mathbf{H}$ у стенки в месте расположения щели (рис. 4.8в). Вектор Умова-Пойнтинга направлен перпендикулярно плоскости волновода. Через щель A , таким образом, электромагнитная энергия принципиально может излучаться. То же самое можно сказать о щели B в широкой стенке, смещённой относительно продольной оси волновода и идущей параллельно этой оси. Это значит, что щели A и B могут быть использованы как эффективные волноводные излучатели. Наоборот, чтобы устранить излучение в тех случаях, когда щель A используется для исследования поля, необходимо прикрывать

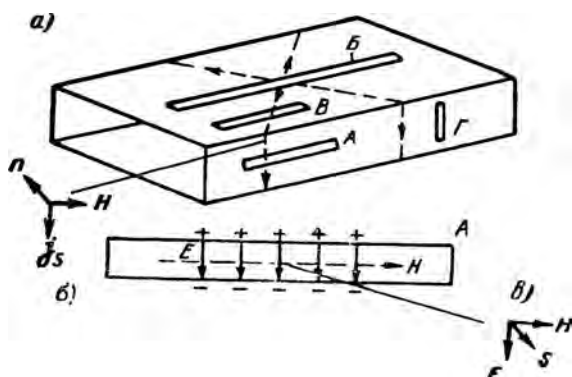


Рис. 4.8. Излучающие и неизлучающие щели в волноводе (а), структура электрического и магнитного полей у излучающей щели (б)

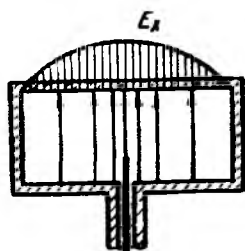


Рис. 4.9. Возбуждение волны H_{01} штырём

её сверху металлическим экраном, имеющим контакт с проводящей поверхностью волновода. Итак, щели A и B , перерезающие линии поверхностного тока, могут излучать электромагнитную энергию и, следовательно, осуществлять энергетическую связь волновода с окружающим пространством.

В отличие от них узкая продольная щель B , прорезанная по середине широкой стенки волновода, не перерезает линий тока и поэтому практически не излучает электромагнитной энергии. Практически не излучает также узкая поперечная щель Γ , прорезанная в узкой стенке волновода¹⁾. Эти щели не осуществляют заметной энергетической связи.

Как излучающие, так и неизлучающие щели часто находят использование в технике. В частности, неизлучающая продольная щель B широко используется в специальных *волноводных измерительных линиях*, предназначенных для исследования распреде-

¹⁾ Строго говоря, с увеличением ширины увеличивается излучение как щели B , так и щели Γ . Щель B начинает перерезать линии тока волны H_{01} ; щель Γ начинает перерезать линии тока волн других видов, которые возбуждаются у этой щели, как неоднородности.

ления поля вдоль волновода по схеме (рис. 4.76). При этом отсутствие излучения из такой щели (при ширине её $d \ll \lambda$) является большим достоинством. Щели A и B , обычно резонансной длины (см. также гл. 8 и 9), используются как *элементы волноводных антенн*.

Осуществляя передачу энергии, элементы связи могут быть использованы не только для вывода энергии из волновода, но и для ввода энергии в него, т. е. для *возбуждения волновода*. Волну H_{01} легко, например, возбудить штырём, ориентированным вдоль линий электрического поля этой волны (рис. 4.9). Для этой же цели может служить щель, поле в которой создаётся падающей на неё снаружи волновода электромагнитной волной. Волна H_{01} возбуждается при этом, если щель перерезает линии поверхностных токов, соответствующие возбуждаемой волне. Для возбуждения можно использовать также виток с током, располагаемый перпендикулярно линиям магнитного поля возбуждаемой волны. Наиболее часто используется возбуждение волновода штырём и щелью.

§ 4.5. СТРУКТУРА ПОЛЯ ВОЛН H ВЫСШИХ ТИПОВ. ЭЛЕМЕНТЫ СВЯЗИ И ОБЪЕМНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Из волн H высших типов остановимся в первую очередь на волне H_{11} .

Выражения для составляющих поля этой волны имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= A \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - \alpha z) \\ H_x &= -\frac{\lambda_{кр}^2}{2a\lambda_g} A \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - \alpha z) \\ H_y &= -\frac{\lambda_{кр}^2}{2b\lambda_g} A \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - \alpha z), \\ E_x &= \rho_H H_y \\ E_y &= -\rho_H H_x \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Соотношения для H_x , H_y , E_x , E_y получены как реальная часть от соотношений (4.42), (4.43), (4.45) при $m = n = 1$ (для простоты принято, что $\lambda < \lambda_{кр}$ и что коэффициент A является вещественным).

Картина поля волны H_{11} представлена на рис. 4.10. В частности, на рис. 4.10а представлено распределение продольной составляющей магнитного поля H_z , известное уже по § 4.3. Это распределение складывается из четырёх пространственных «жгутов» маг-

нитных линий с чередующимися направлениями. Рисунок 4.10а соответствует распределению магнитного поля в поперечном сечении $I-I$ (рис. 4.10б), в котором поперечные составляющие поля отсутствуют, так как для этого сечения множитель $\sin(\omega t - \alpha z) = 0$.

Линии магнитного поля на чертеже представляют собой замкнутые кривые (рис. 4.10б). Уравнения этих кривых могут быть получены путём интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}$$

(см. также § 2.9). Распределение поля в поперечном сечении $II-II$, в котором $\cos(\omega t - \alpha z) = 0$ и отсутствует продольная составляющая магнитного поля, показано на рис. 4.10в. Магнитное поле в этом сечении поперечно. Линии

магнитного поля выходят из двух „жгутов“, лежащих на одной диагонали контура сечения, и входят в остающуюся пару „жгутов“. Линии электрического поля расположены в поперечных плоскостях (волна H). В соответствии с соотношением (4.44) они всюду перпендикулярны к линиям магнитного поля. Взаимная ориентация электрического и магнитных полей определяется направлением переноса энергии. На стенках волновода создаются чередующиеся по знаку поверхностные заряды, что всегда имеет место в случае волн типа H .

На рис. 4.11а показано распределение электрического поля в поперечной плоскости для волны H_{02} . Видно, что изображённое более сложное поле складывается из двух элементарных ячеек волны H_{01} . Подобно этому поле волны H_{12} (рис. 4.11б) складывается из двух элементарных ячеек волны H_{11} . Форма ячеек зависит от формы трубы и может быть квадратной или прямоугольной. Линии электрического поля всегда нормальны плоскостям,

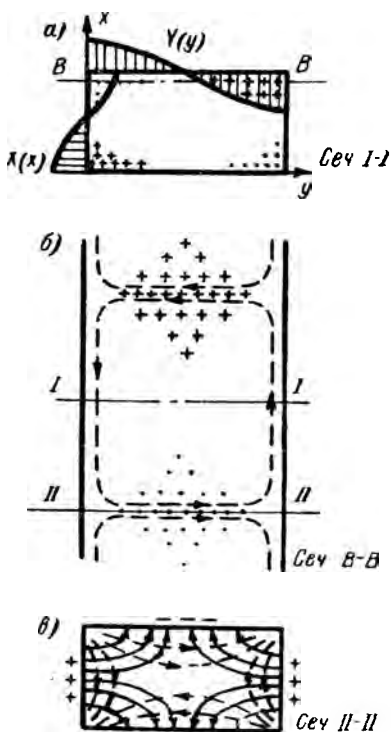


Рис. 4.10. Структура поля волны H_{11}

разделяющим ячейки. Поэтому можно, не нарушая поля в волноводе, поместить в этих плоскостях проводящие металлические пластины. На рис. 4.11в и 4.11г показаны волны H_{10} и H_{20} , отличающиеся от волн H_{01} и H_{02} только поляризацией поля.

Перейдём к рассмотрению элементов связи применительно к различным типам волн H_{mn} . Для приёма энергии из волновода часто используется штырь, расположенный вдоль линий электрического поля распространяющейся волны. Этот же штырь может служить для возбуждения колебаний соответствующего типа волны при условии, что к нему подводится энергия. Как возбуждение, так и приём возможны только в том случае, если штырь не попадает в узел электрического поля. Если же штырь попадает в узел, он не будет связан с полем данной волны и не обеспечит ни приёма, ни возбуждения её колебаний. Очевидно, что в зави-

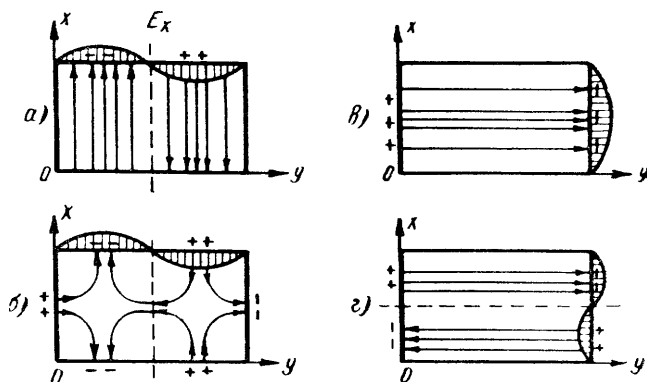


Рис. 4.11 Электрическое поле волн H_{02} (а), H_{12} (б), H_{10} (в), H_{20} (г)

симости от своего расположения один и тот же штырь (или какой-либо иной элемент связи) может быть связан с полем одной волны, не будучи связан с полем другой.

В качестве примера рассмотрим штырь (рис. 4.12а), помещённый посредине широкой стенки волновода. В режиме приёма этот штырь подвергается воздействию поля волны H_{01} , не реагируя на поле волны H_{02} . Соответственно при подаче энергии от внешнего источника он возбуждает колебания волны H_{01} , не возбуждая при этом колебаний волны H_{02} .

То же самое можно сказать о комбинации двух симметричных штырей, присоединённых параллельно к одному и тому же коаксиальному фидеру (рис. 4.12б). Комбинация этих штырей представляет собой элемент связи с волной H_{01} , не будучи элементом связи с волной H_{02} .

Иначе будет, если один из штырей соединён с другим через полуволновый отрезок коаксиального фидера (рис. 4.12в). Тогда в режиме приёма волны H_{02} наводимые эдс складываются, а в режиме приёма волны H_{01} — вычитаются. Изображённое устройство является теперь элементом связи с волной H_{02} , не представляя собой элемента связи для волны H_{01} .

Подобные же заключения о действии комбинированных элементов связи (рис. 4.12б и в) могут быть сделаны в результате анализа режима возбуждения (а не приёма). В самом деле, каждый из штырей (рис. 4.12б и в) в отдельности возбуждает как волну H_{02} , так и волну H_{01} . Однако в первом случае (рис. 4.12б) волны H_{01} складываются, а волны H_{02} взаимно компенсируются, во втором же случае (рис. 4.12в) должны иметь место обратные

фазовые соотношения. Графики (рис. 4.12 г и д) иллюстрируют сказанное.

Итак мы убеждаемся, что принципиально возможно как избирательное возбуждение, так и избирательный приём волн различных типов, т. е., иначе, *избирательная связь с отдельными типами волн*. В отличие от широко используемой в радиотехнике избирательности по частоте, здесь идёт речь о своеобразной *пространственной избирательности* элементов связи по отношению к различным типам волн, отличающимся распределением поля в пространстве.

Как разновидность пространственной избирательности (но уже не элементов связи, а других специально подобранных неоднородностей) оказывается возможной *фильтрация* отдельных типов волн в волноводе. В качестве простейшего пространственного

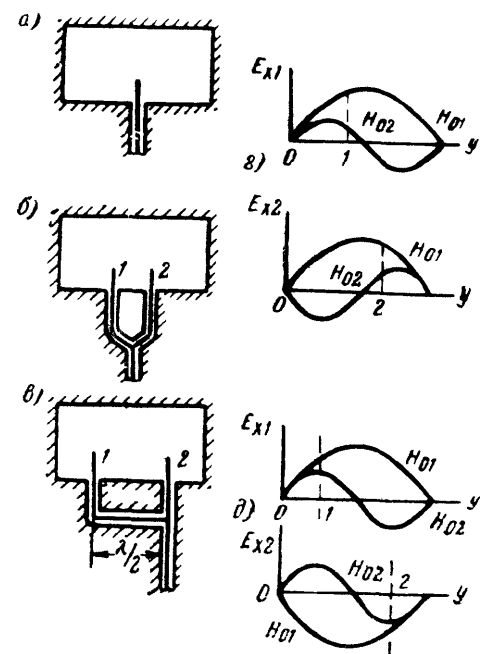


Рис. 4.12. Одиночный возбуждающий штырь (а); система двух штырей, питаемых в фазе (б); система двух штырей, питаемых в противофазе (в); графики полей, возбуждаемых штырями системы б (г); то же, для системы в (д)

фильтра можно использовать поперечную решётку, составленную из тонких проводников. Если проводники расположены параллельно вектору электрического поля распространяющейся волны, под действием поля волны в них возбуждаются токи. При расстоянии между проводниками $d \ll \lambda$ составленная из этих проводников решётка оказывает действие, подобное действию идеального экрана, и практически полностью отражает падающую на неё волну. Наоборот, решётка из тонких проводников, перпендикулярных линиям электрического поля, практически не препятствует распространению волны, поскольку в ней не возбуждают-

ся токи. Очевидно, что одна и та же решётка может пропускать какой-либо из типов колебаний, практически полностью отражая другой тип, т. е. играть роль фильтра типов волн.

В отличие от обычных частотных фильтров устройства, предназначенные для фильтрации волн с различным распределением поля в пространстве, могут быть названы *объёмными фильтрами* или *фильтрами типов волн*.

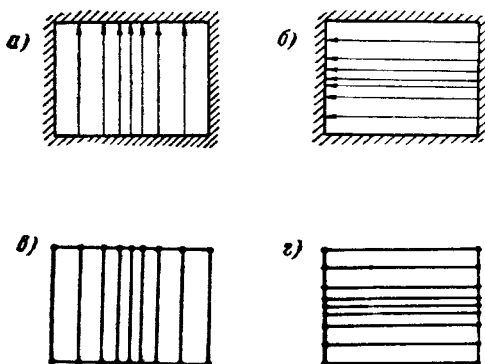


Рис 4.13. Волны H_{01} , H_{10} (а, б) и фильтры для этих волн (в, г)

Простейшие разновидности фильтров типов волн для волновода прямоугольного сечения показаны на рис. 4.13.

В таком волноводе с равным успехом могут распространяться волны H_{01} и H_{10} (рис. 4.13а и б). Объёмные фильтры (рис. 4.13в и г) позволяют по выбору пропускать одну из волн, отражая при этом вторую, т. е. осуществлять функции пространственного селектора типов колебаний.

На основе изучения структур полей волн типа H и учёта влияния на них простейших неоднородностей мы приходим, таким образом, к выводу о принципиальной возможности избирательного возбуждения, приёма и фильтрации различных типов волн.

§ 4.6. СТРУКТУРА ПОЛЯ ВОЛН E

Простейшей из волн типа E является волна E_{11} с единичными индексами.

Выражения для составляющих поля этой волны получим из соотношений (4.37), (4.38) и (4.40), заменяя $\gamma = i\alpha = i \frac{2\pi}{\lambda_g}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}$ и взяв от них реальную часть

$$\begin{aligned}
 E_z &= B \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - \alpha z) \\
 E_x &= \frac{\lambda_{кр}^2}{2a\lambda_g} B \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - \alpha z) \\
 E_y &= \frac{\lambda_{кр}^2}{2b\lambda_g} B \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - \alpha z) \\
 H_x &= -\frac{1}{\rho_E} E_y \\
 H_y &= \frac{1}{\rho_E} E_x \\
 H_z &= 0
 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Соотношения (4.58) написаны в предположении, что $\omega > \omega_{кр}$ и что коэффициент B выражается чисто вещественным числом.

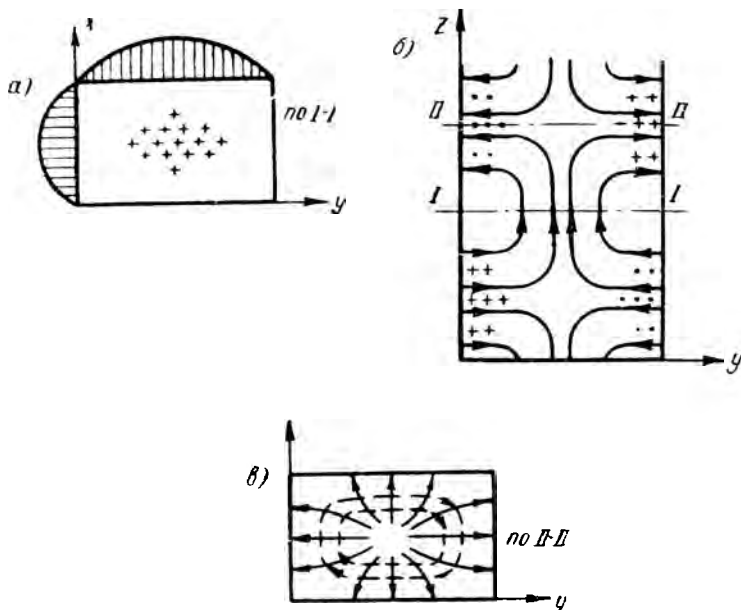


Рис. 4.14. Структура поля волны E_{11}

Картина поля волны E_{11} представлена на рис. 4.14. На рис. 4.14а показано распределение продольной составляющей электрического поля E_z в поперечном сечении волновода, известное из § 4.3. Это распределение характеризуется наличием продольного «жгута» линий электрического поля, идущих вдоль волновода.

Поле, изображённое на рис. 4.14а, относится к сечению $I—I$ (рис. 4.14б), в котором поперечная составляющая электрического поля отсутствует, так как $\sin(\omega t - \alpha z) = 0$. Линии электрического поля, образующие «жгут», сходятся в него со стенок волновода и расходятся обратно на стенки через $\frac{\lambda_g}{2}$. На стенках волновода наводятся заряды, причём для волны E_{11} в фиксированном поперечном сечении заряды имеют один и тот же знак. Распределение электрического поля в сечении $II—II$, в котором поле поперечно и заряды на стенках максимальны, показано на рис. 4.14в. Линии магнитного поля расположены в поперечных плоскостях (волна E) и идут в этих плоскостях перпендикулярно линиям электрического поля.

Если изобразить картину тока смещения $j_{см} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ (на рис. 4.14 не показана), сдвинутую на четверть длины волны в волноводе по отношению к картине электрического поля, можно убедиться, что линии магнитного поля окружают линии токов смещения. Плоскости, в которых максимальны поперечные составляющие электрического и магнитного полей, совпадают, а взаимная ориентация этих полей определяется направлением переноса энергии вдоль волновода.



Рис. 4.15. Структура поля волны E_{12}

Волны E более сложных типов состоят из элементарных ячеек волны E_{11} . На рис. 4.15 представлена картина поля для волны E_{12} , состоящая из двух элементарных ячеек волны E_{11} .

Возбуждение волн E , как и других типов волн, легко осуществляется штырями, которые для этого располагаются вдоль ли-

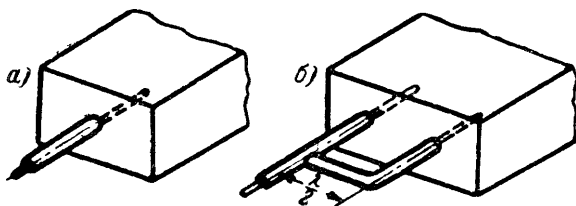


Рис. 4.16 Способы возбуждения волн E_{11} (а) и E_{12} (б)

ний электрического поля. Рисунок 4.16а иллюстрирует способ возбуждения волны E_{11} , а рис. 4.16б — волны E_{12} . При симметрии конструкции в случае (рис. 4.16а) не возбуждается волна E_{12} , а в случае (рис. 4.16б) не возбуждается волна E_{11} . Волны типа H не возбуждаются в обоих случаях, что является преимуществом возбуждения волн типа E продольными (а не поперечными) штырями.

§ 4. 7. РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКИХ ДЛИН ВОЛН. ДИАГРАММА ТИПОВ ВОЛН. ПРЕИМУЩЕСТВА РАБОТЫ НА ВОЛНЕ ОСНОВНОГО ТИПА

Критические частоты и критические длины волн определяются, как частоты и длины волн, для которых постоянная распространения

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} \quad (4.59)$$

обращается в нуль. Отсюда критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.60)$$

Подставляя значения собственных чисел k для различных типов волн в прямоугольном волноводе

$$k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (4.61)$$

находим соответствующие значения его критических длин волн

$$\lambda_{кр} = \lambda_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (4.62)$$

Как видно из ф-лы (4.62), чем сложнее поле, т. е. чем больше индексы m и n , тем меньше критическая длина волны λ_{mn} и выше критическая частота

$$f_{mn} = \frac{v}{\lambda_{mn}}. \quad (4.63)$$

При одинаковых индексах m и n критические длины волн для E и H колебаний одинаковы (это является особенностью прямоугольных волноводов и не относится, например, к круглым). Наименьшим значением собственного числа k и, следовательно, *наименьшей критической частотой обладает один из двух типов волн H_{01} или H_{10}* в зависимости от того, будет ли $b > a$ или $a > b$. Критические длины волн для этих типов соответственно равны

$$\lambda_{01} = 2b, \quad (4.64)$$

$$\lambda_{10} = 2a. \quad (4.65)$$

В дальнейшем условимся выбирать расположение волновода относительно осей координат так, чтобы всегда было $b \gg a$. При

неравенстве сторон получим, что наивысшей критической длиной волны (наинизшей критической частотой) обладают колебания H_{01} ¹⁾, способные распространяться в диапазоне волн $\lambda < 2b$.

Чтобы более чётко охарактеризовать диапазоны волн, в пределах которых распространяются те или иные типы волн, целесообразно показать их в виде диаграммы, используя штриховку отдельных участков вдоль оси λ .

Рассмотрим расчёт шести наибольших критических длин волн для волновода (рис. 4.17) с внутренними размерами $a = 3,4$ см, $b = 7,2$ см.

Расчёт производим по ф-ле (4.62). Результаты расчёта сводим в табл. 4.1.

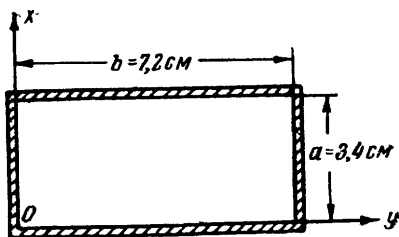


Рис. 4.17. Сечение прямоугольного волновода

Таблица 4.1

Типы колебаний	Критическая длина волны, см	
	расчётные формулы	результаты расчёта при $a = 3,4$ см и $b = 7,2$ см
H_{01}	$\lambda_{01} = 2b$	14,40
H_{02}	$\lambda_{02} = b$	7,20
H_{10}	$\lambda_{10} = 2a$	6,80
H_{11} и E_{11}	$\lambda_{11} = \frac{2a}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$	6,16
H_{12} и E_{12}	$\lambda_{12} = \frac{2a}{\sqrt{1 + \left(\frac{2a}{b}\right)^2}}$	4,95
H_{03}	$\lambda_{03} = \frac{2}{3} b$	4,80

По данным проведённого расчёта построена диаграмма (рис. 4.18), на которой вдоль шкалы длин волн нанесены диапазоны, в пределах которых указанные в табл. 4.1 типы волн распространяются в идеальном волноводе без затухания. Диаграмм-

¹⁾ В литературе часто используется иная система координат, и колебания с наинизшей критической частотой обозначаются H_{10} . Это равносильно тому, что принимается соотношение сторон $a > b$.

ма иллюстрирует работу волновода как *частотного фильтра для различных типов волн*. Эту диаграмму будем в дальнейшем сокращённо называть *диаграммой типов волн*. Её можно разбить на три области:

1) Область, для которой

$$\lambda > \lambda_{01} = 2b.$$

В пределах этой области не может распространяться ни один из типов волн.

2) Область, для которой

$$\left. \begin{aligned} \lambda < \lambda_{01} &= 2b \\ \lambda > \lambda_{02} &= b \\ \lambda > \lambda_{10} &= 2a \end{aligned} \right\}. \quad (4.66)$$

В пределах этой области в волноводе может распространяться только один тип волны H_{01} .

3) Область, для которой

$$\lambda < \lambda_{02} = b \quad (4.67)$$

или

$$\lambda < \lambda_{10} = 2a. \quad (4.68)$$

В пределах этой области в волноводе могут распространяться несколько типов волн одновременно. Точная граница области определяется наибольшим из значений b или $2a$.

Обычно стремятся к тому, чтобы энергия в волноводе могла передаваться только волнами одного типа или, как говорят, чтобы волновод работал на волне одного типа. Таким типом волны, ко-

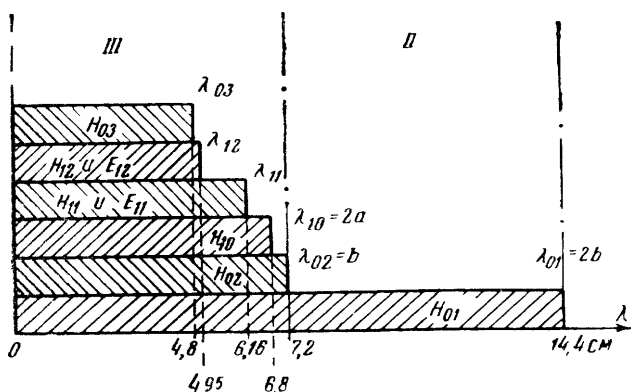


Рис. 4.18. Диаграмма типов волн в волноводе стандартного сечения

торый распространяется по волноводу без других типов, согласно диаграмме (рис. 4.18), действительно оказывается тип волны H_{01} .

Этот тип называется *основным типом волны* прямоугольного волновода. Все остальные типы волн как H , так и E называются *высшими типами волн*.

Стараются избегать одновременной передачи энергии от генератора к нагрузке несколькими типами волн, поскольку при этом имеют место нежелательные интерференционные явления. Действительно, допустим, что по волноводу от генератора к приёмному штырю одновременно распространяются волны двух типов, например, H_{01} и H_{02} . На рис. 4.19 показано распределение мгновенных значений полей волн этих типов вдоль волновода для какого-то фиксированного момента времени t . Значения длины волны в волноводe λ_g у них различны, поскольку отличаются критические длины волн. Чтобы оценить результат интерференции, напишем выражение для суммарного электрического поля при фиксированных значениях координат поперечного сечения

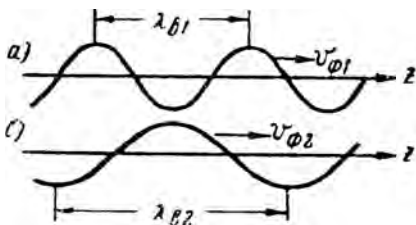


Рис 4.19. Распределения мгновенных значений поля вдоль оси волновода для двух различных типов волн

$$E = E_1 + E_2 = D_1 e^{i(\omega t - \alpha_1 z)} + D_2 e^{i(\omega t - \alpha_2 z)},$$

где коэффициенты D_1 и D_2 определяются интенсивностями двух интерферирующих волн и выбором координат в поперечном сечении. Для простейшего случая, когда $D_1 = D_2 = D$,

$$E = 2D \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} z e^{i(\omega t - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} z)}.$$

Написанное выражение показывает, что одновременно с изменением фазы, характерным для бегущих волн, имеет место дополнительное изменение амплитуды суммарных колебаний вдоль направления распространения. Поэтому приёмный штырь, реагирующий на суммарное поле, подвергается воздействию поля различной напряжённости в зависимости от величины множителя $\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} z$, в сечениях, для которых этот множитель равен

нулю, поле вообще отсутствует. Установившееся распределение амплитуд поля, как и при стоячей волне, является *нестабильным*.

Множитель $\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} z$ обычно сильно зависит от длины волны λ , причём тем в большей степени, чем больше расстояние z от возбуждающего штыря. Если $z \gg \lambda$, то относительно неболь-

шие изменения длины волны генератора λ могут приводить к резкому изменению суммарного поля в сечении z от максимума до нуля. При передаче энергии одновременно на двух или нескольких типах волн интерференционная картина поля может быть весьма неустойчива по отношению к малым изменениям длины волны генератора.

Характерно, кроме того, что для каждого типа волны с изменением частоты может резко меняться нагрузка на генератор, поскольку согласование нагрузки с волноводом для нескольких типов волн одновременно является затруднительным, в силу чего для ряда типов волн может иметь место режим, близкий к режиму стоячей волны.

По совокупности указанных недостатков передачу энергии по волноводам предпочитают вести на каком-либо одном типе волны. Наиболее удобно использовать волну основного типа H_{01} . Чтобы избежать передачи энергии волнами других типов, достаточно выбрать размеры волновода в соответствии с условиями (4.66), т. е. так, чтобы по волноводу распространялся только один тип волны H_{01} . Условия (4.66) удобнее переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} b &< \lambda < 2b \\ \lambda &> 2a \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Рисунок 4.20 иллюстрирует вопросы возбуждения колебаний с точки зрения рассмотренного в § 2.13 разложения на пространственные гармоники. Заданное распределение тока (рис. 4.20а)



Рис. 4.20. Разложение тока в поперечном сечении прямоугольного волновода на пространственные гармоники

можно разбить на пространственные гармоники, соответствующие волнам H_{01} , H_{03} , E_{11} , H_{11} и т. д. Каждая гармоника тока создаёт свой тип волны в волновод. Если соблюдаются условия (4.69), один и только один тип волны является распространяющимся, остальные дают экспоненциально затухающие по обе стороны возбудителя поля, образующие в сумме местное поле возбудителя.

Проблема передачи энергии на одном типе волны может быть решена не только за счёт выбора размеров волновода и соответствующего типа волны но также путём использования специальных возбуждающих и приёмных устройств, обеспечивающих возбуждение и приём нужного типа волны. Примеры подобных устройств приводились ранее.

В таком решении задачи, однако, имеются весьма существенные недостатки. Дело в том, что в волноводном тракте практически всегда имеются неоднородности, например, в виде штыря (рис. 4.21), в котором возбуждается

ток полем распространяющейся волны. Этот ток является, очевидно, вторичным источником колебаний и в общем случае может возбуждать нежелательные волны. При несоблюдении условий (4.69) последние будут распространяться по всему волноводу, интерферируя с основной волной. Таким образом, приходится учитывать влияние каждой неоднородности, как источника распространяющихся волн (или же ставить на всём протяжении волновода специальные объёмные фильтры).

Если же размеры волновода выбраны в соответствии с соотношениями (4.67), то сам волновод является фильтром типов волн и волны высших типов по нему обычно не распространяются, а, налагаясь у неоднородностей, образуют местные поля. Это упрощает условия работы волновода и приближает их к условиям работы длинной линии.

В отдельных случаях, тем не менее, идут на такое увеличение размеров волновода, когда по нему может распространяться несколько типов волн, например, для того, чтобы существенно понизить затухание за счёт потерь в стенках, и для того, чтобы увеличить допустимую мощность, которую можно передать без опасности электрического пробоя.

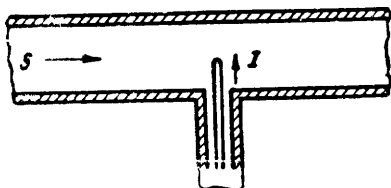


Рис. 4.21. Соединение волновода с коаксиальным фидером при помощи штыря

§ 4.8. РЕЖИМ РАБОТЫ ВОЛНОВОДА НА ВОЛНЕ ОСНОВНОГО ТИПА

На регулярном участке волновода волна основного типа может распространяться в двух направлениях: от генератора к нагрузке и от нагрузки к генератору. Если нагрузка целиком потребляет переносимую падающей волной мощность, говорят, что она согласована с волноводом. Если нагрузка потребляет переносимую падающей волной мощность лишь частично, так что появляется отражённая волна, говорят, что она не согласована с волноводом. Режим работы волновода определяется *интерференцией падающей и отражённой волн* (в данном случае одного основного типа колебаний).

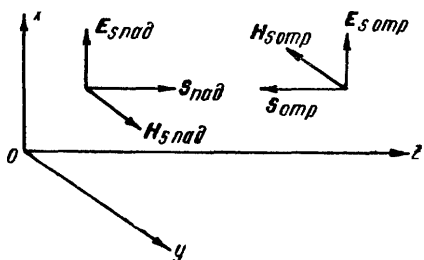
Зафиксировав произвольную координату y (полагая, например, $y = \frac{b}{2}$), выражения для комплексных амплитуд поперечных составляющих поля падающей волны можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x\text{пад}} &= A e^{-i\alpha z}, \\ \dot{H}_{y\text{пад}} &= \frac{A}{\rho_H} e^{-i\alpha z}. \end{aligned}$$

Подобным же образом для отражённой волны:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x\text{отр}} &= B e^{i\alpha z}, \\ \dot{H}_{y\text{отр}} &= -\frac{B}{\rho_H} e^{i\alpha z}. \end{aligned}$$

Знак минус в последнем из соотношений определяется тем, что для отражённой волны постоянная распространения γ заменяется на $-\gamma$, а волновое сопротивление $\rho_H = \frac{i\omega\mu}{\gamma}$ на $(-\rho_H) = -\frac{i\omega\mu}{\gamma}$. Другими словами, взаимная ориентация составляющих



электрического и магнитного полей по осям координат x и y для обратной волны иная, чем для прямой волны, поскольку эти волны переносят энергию в противоположных направлениях (рис. 4.22).

Выражения для комплексных амплитуд поперечных составляющих поля в волноводе, таким образом, принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= A e^{-i\alpha z} + B e^{i\alpha z} \\ \dot{H}_y &= \frac{1}{\rho_H} (A e^{-i\alpha z} - B e^{i\alpha z}) \end{aligned} \right\} (4.70)$$

Рис. 4.22. Взаимная ориентация поперечных составляющих поля для падающей и отражённой волн

Написанные выражения аналогичны по своей структуре соотношениям для напряжения и тока в длинной линии. Последнее означает, что *распределение поперечных составляющих электромагнитного поля вдоль волновода такое же, как и распределение напряжения и тока вдоль длинной линии.*

Различные случаи распределения амплитуд поля вдоль оси волновода показаны на рис. 4.23. Рисунок 4.23а соответствует режиму бегущей волны, когда амплитуда колебаний не меняется вдоль оси z . Рисунок 4.23б соответствует режиму стоячей волны, когда амплитуда результирующего колебания изменяется от максимума до нуля. Рисунок 4.23в соответствует общему случаю

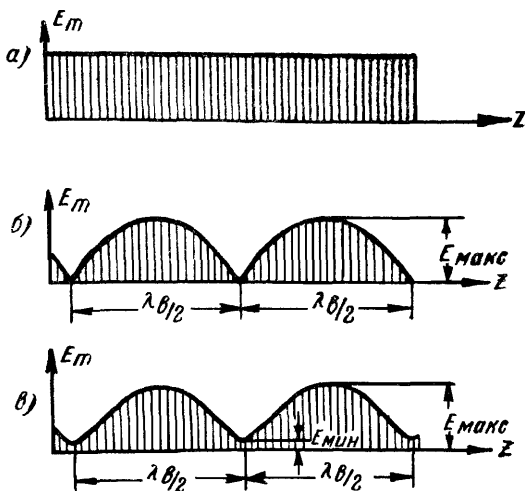


Рис. 4.23. Распределение амплитуд поля вдоль оси волновода при работе на волне основного типа:

а) в режиме бегущей волны; б) в режиме стоячей волны; в) в смешанном режиме

смешанного режима, который имеет место при частичном отражении.

Распределение электрического поля может быть экспериментально исследовано при помощи приёмного штыря, перемещаемого вдоль участка волновода, имеющего продольную щель (рис. 4.8б). Специальные отрезки волновода с продольной щелью и приёмным штырём, предназначенные для исследования режима волновода, называются, как уже упоминалось об этом, *волноводными измерительными линиями*. На рис. 4.24 показана волноводная измерительная линия, которая состоит из волноводной секции линии *А* и измерительной головки *Б*. Кроме зонда и детектора, о которых речь шла выше, в измерительную головку входит объёмная колебательная система, связывающая детектор и зонд. На рисунке видны ручки настройки колебательной системы 1, 2, 3, ручка 4 для изменения глубины погружения зонда и ручка 5 для перемещения измерительной головки вдоль линии.

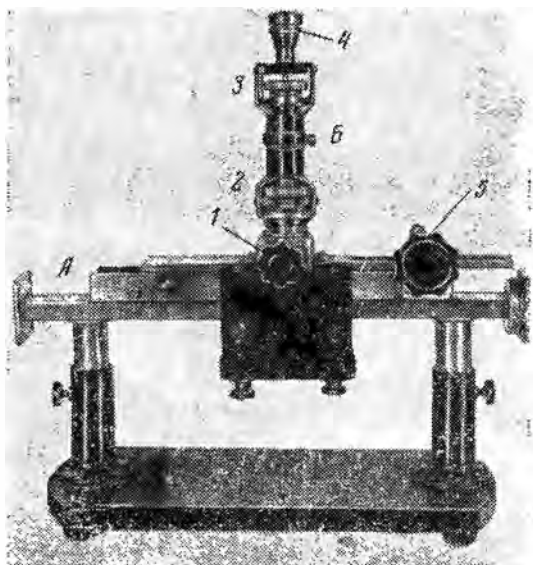


Рис. 4.24. Волноводная измерительная линия

Производя измерения при помощи волноводной измерительной линии, режим работы волновода характеризуют параметрами, уже известными из теории длинных линий. В частности, при помощи волноводной измерительной линии можно измерять коэффициенты бегущей и стоячей волн, вводимые по аналогии с теорией длинных линий,

$$k_0 = \frac{E_{x \text{ мин}}}{E_{x \text{ макс}}} \quad (4.71)$$

$$k_c = \frac{E_{x \text{ макс}}}{E_{x \text{ мин}}} \quad (4.72)$$

Кроме этих коэффициентов, по аналогии с длинной линией часто вводится комплексный коэффициент отражения

$$\rho = \frac{\dot{E}_{x \text{ мин}}}{\dot{E}_{x \text{ на д}}} = \frac{B e^{-i\alpha z}}{A e^{i\alpha z}} = \rho_0 e^{-i2\alpha z} \quad (4.73)$$

и комплексное сопротивление в данном сечении линии

$$Z = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} . \quad (4.74)$$

Соотношения (4.70—4.74), идентичные соответствующим соотношениям теории длинных линий, открывают широкие возможности использования диаграммы А. Р. Вольперта при расчёте волноводов. Более подробно на этом мы не останавливаемся и отсылаем читателя к литературе по длинным линиям, ввиду того, что методика расчёта по диаграмме для длинных линий и волноводов является общей. Характерным для волноводов является только то, что приведённые величины сопротивлений $Z' = \frac{Z}{\rho}$ и расстояний $l' = \frac{l}{\lambda_g}$ рассчитываются по отношению к волновому сопротивлению волновода ρ и длине волны в волноводе λ_g соответственно.

Анализ режима работы волновода имеет существенное значение при согласовании волновода с нагрузкой. Сущность согласования заключается в том, что в волновод вносится дополнительная неоднородность, которая создаёт отражённую волну, компенсирующую волну, отражённую от нагрузки. Согласованный волновод обладает большими преимуществами перед несогласованным. Как и для длинной линии, этими преимуществами являются: устойчивость режима при изменении частоты генератора, возможность передачи больших мощностей без опасности электрического пробоя, меньшие потери мощности при протекании токов по стенкам волновода.

§ 4.9. РАСЧЁТ МОЩНОСТЕЙ, ПЕРЕНОСИМЫХ ВОЛНАМИ ОСНОВНОГО И ВЫСШИХ ТИПОВ. ПРЕДЕЛЬНАЯ И ДОПУСТИМАЯ МОЩНОСТИ

Большое практическое значение имеет расчёт мощности, переносимой электромагнитным полем вдоль волновода. Величина этой мощности определяется *поперечными компонентами поля*, поскольку продольные компоненты характеризуют лишь последовательные отражения энергии в плоскости поперечного сечения. Производя расчёт передаваемой мощности вначале для согласованного волновода, выражения для поперечных компонентов поля при частоте выше критической записываем в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{xm} \sin \frac{\pi}{b} y \cos (\omega t - \alpha z) \\ H_y &= \frac{E_x}{\rho_H} = \frac{E_{xm}}{\rho_H} \sin \frac{\pi}{b} y \cos (\omega t - \alpha z) \end{aligned} \right\} . \quad (4.75)$$

Плотность потока энергии в произвольной точке поперечного сечения в направлении оси z будет тогда равна

$$S_z = E_x H_y = \frac{E_{xm}^2}{\rho_H} \sin^2 \frac{\pi}{b} y \cos^2 (\omega t - \alpha z).$$

Интегрируя по площади поперечного сечения (рис. 4.25) и усредняя по времени, определяем передаваемую мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b S_z dx dy. \quad (4.76)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 (\omega t - \alpha z) dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi}{b} y dy = \frac{b}{2},$$

$$\int_0^a dx = a,$$

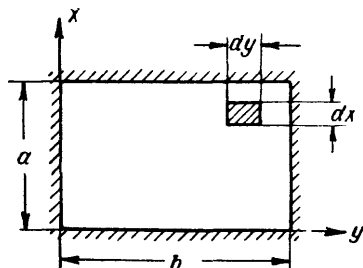


Рис. 4.25. К расчёту мощности, переносимой по волноводу

получим окончательное выражение для мощности, переносимой бегущей волной основного типа

$$P = \frac{E_{xm}^2}{4 \rho_H} ab, \quad (4.77)$$

где $\frac{E_{xm}^2}{\rho_H}$ — максимальная плотность потока энергии (во времени и в пространстве), произведение ab — площадь поперечного сечения, а коэффициент $1/4$ учитывает усреднение по времени ($1/2$) и по координате y ($1/2$).

Соотношение (4.77) имеет большое значение при расчёте волноводов. Оно позволяет рассчитать передаваемую мощность по заданной амплитуде электрического поля в режиме бегущей волны, а также решить обратную задачу о расчёте амплитуды напряжённости электрического поля бегущей волны E_{xm} по известной величине передаваемой мощности P

$$E_{xm} = \sqrt{\frac{4 P \rho_H}{ab}}. \quad (4.78)$$

При наличии отражённой волны мощность, передаваемая по волноводу без потерь, определяется в силу закона сохранения энергии как разность мощностей падающей и отражённой волн

$$P = \left(\frac{E_{m \text{ пад}}^2}{4 \rho_H} - \frac{E_{m \text{ отр}}^2}{4 \rho_H} \right) ab. \quad (4.79)$$

В целях преобразования соотношения (4.79) запишем

$$E_{m \text{ пад}}^2 - E_{m \text{ отр}}^2 = (E_{m \text{ пад}} + E_{m \text{ отр}})(E_{m \text{ пад}} - E_{m \text{ отр}}).$$

Поскольку сумма и разность амплитуд падающей и отражённой волн представляют соответственно максимальную и минимальную амплитуды колебаний вдоль волновода, можно написать

$$\left. \begin{aligned} E_{m \text{ пад}} + E_{m \text{ отр}} &= E_{\text{макс}} \\ E_{m \text{ пад}} - E_{m \text{ отр}} &= E_{\text{мин}} \end{aligned} \right\}. \quad (4.80)$$

Тогда

$$P = \frac{E_{\text{макс}} E_{\text{мин}}}{4 \rho_H} ab. \quad (4.81)$$

Поскольку

$$\frac{E_{\text{макс}}}{E_{\text{мин}}} = k_c,$$

полученное соотношение преобразуется к виду

$$P = \frac{E_{\text{макс}}^2}{4 \rho_H k_c} ab, \quad (4.82)$$

удобному для расчёта предельной и допустимой мощностей.

Предельной называют наибольшую мощность, которую можно передать по волноводу без электрического пробоя. Предельное значение передаваемой мощности определяется предельной напряжённостью электрического поля $E_{\text{пред}}$. Для воздуха при нормальном атмосферном давлении и нормальной ионизации предельная напряжённость поля составляет около 30 кВ/см. В режиме бегущей волны ($k_c = 1$) предельная мощность определяется по формуле

$$P_{\text{пред.б.в.}} = \frac{E_{\text{пред}}^2}{4 \rho_H} ab. \quad (4.83)$$

Допустимая рабочая мощность рассчитывается с учётом наличия отражённой волны (обычно считается допустимым $k_c \leq 1,5$),

необходимого запаса электрической прочности, а также с учётом неоднородностей, вызывающих местные концентрации электрического поля. Допустимая мощность должна быть в несколько раз меньше, чем предельная в режиме бегущей волны. Обычно считают, что

$$P_{дон} \approx \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{5} \right) P_{пред. б. в.}.$$

Предельная и допустимая мощности заметно меняются в диапазоне рабочих частот волновода. Подставляя в соотношение (4.82) значение

$$\rho_H = \frac{\rho_0}{V 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2},$$

где $\rho_0 = 120 \pi \approx 377$ ом, и замечая, что для волны H_{01} величина $\lambda_{кр} = 2b$, получим

$$P_{пред} = \frac{E_{пред}^2}{4\rho_0} ab V 1 - \left(\frac{\lambda}{2b} \right)^2. \quad (4.84)$$

Отсюда видно, что при $\lambda = 2b$ предельная мощность (как и вообще любая переносимая по волноводу мощность) обращается в нуль.

График предельной мощности в функции отношения длины волны генератора к критической длине волны $\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} = \frac{\lambda}{2b} = \xi$ представлен на рис. 4.26. Область $\lambda < b$ (или $\xi < 0,5$), заштрихованная на этом графике, является областью, в которой возможно распространение высших типов волн. Рабочей считают обычно область

$$0,5 < \xi < 0,9. \quad (4.85)$$

Слева эта область ограничивается началом распространения волн высших типов, справа — спаданием предельной мощности вдвое по сравнению с значением на границе области высших типов волн, принятым условно за единицу (100%).

Следует уточнить, что полное устранение распространяющихся волн высших типов в пределах выделенной области имеет место лишь при соблюдении дополнительного условия $\lambda > 2a$. Последнее выполняется, если $a < \frac{b}{2}$, что обычно имеет место. Соотношение (4.85) характеризует тогда диапазон рабочих длин волн

$$b \leq \lambda < 1,8 b$$

при заданных размерах волновода.

Чтобы обеспечить выполнение изложенных выше условий при значительном изменении длины волны λ , приходится одновре-

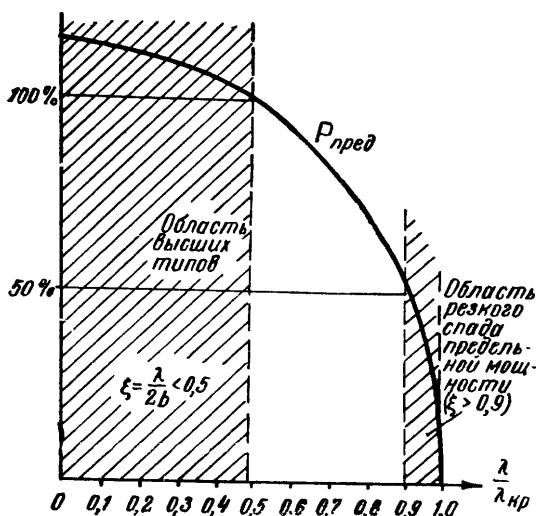


Рис. 4.26 График изменения предельной мощности в функции длины волны генератора

менно изменять каждый из линейных размеров поперечного сечения волновода пропорционально λ . Поскольку подкоренное выражение в ф-ле (4.84) при этом можно считать неизменным, предельная мощность изменяется пропорционально квадрату длины волны.

Приведём простой числовой пример. В волноводе с внутренними размерами $a = 3,4$ см и $b = 7,2$ см при длине волны $\lambda = 10$ см, предельная мощность $P_{пред} = 10,5$ Мвт, допустимая рабочая мощность $P_{доп} = 2,5$ Мвт

При уменьшении длины волны до 1 см, т. е. в десять раз, и пропорциональном изменении размеров волновода обе мощности уменьшаются в 100 раз. В этом случае $P_{пред} \approx 0,1$ Мвт, $P_{доп} \approx 0,025$ Мвт, так что возможность электрического пробоя в волноводе существенно ограничивает величину передаваемой мощности.

Расчёт предельной и допустимой мощностей, передаваемых по волноводу был произведён для волны H_{01} . Подобным же образом можно рассчитывать передаваемую мощность для любого типа волны, имея в виду общее соотношение,

$$P = \int_0^T dt \int_S [\mathbf{E} \mathbf{H}]_z dS = \int_0^T dt \int_S [\mathbf{E}_S \mathbf{H}_S]_z dS.$$

Применительно к режиму бегущей волны в прямоугольном волноводе, когда поперечные составляющие поля синфазны, можно написать

$$P = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b (E_{xm} H_{ym} - E_{ym} H_{xm}) dx dy. \quad (4.86)$$

В целях сокращения выкладок иногда используют несколько видоизменённые формулы для расчёта мощности, имея в виду, что при бегущей волне

$$[E_S H_S]_z = \frac{E_S^2}{\rho} = \rho H_S^2.$$

где для волн типа E

$$E_S = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad}_S E_z$$

и для волн типа H

$$H_S = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad}_S H_z.$$

Переходя от комплексной формы записи двух последних соотношений к тригонометрической и учитывая ф-лу (3.59), получим

для волн типа E

$$P = \frac{1}{2\rho_E} \frac{\alpha^2}{k^2} \int_S E_{zm}^2 dS = \frac{1}{2\rho_0} \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda_e \lambda} \int_S E_{zm}^2 dS$$

для волн типа H

$$P = \frac{\rho_H}{2k^2} \alpha^2 \int_S H_{zm}^2 dS = \frac{\rho_0}{2} \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda_e \lambda} \int_S H_{zm}^2 dS.$$

(4.87)

В качестве примера рассчитаем мощность для волны E_{mn} , когда

$$E_{zm} = B \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

где, в соответствии с изложенным ранее, m и n — целые числа, большие нуля. Интегрируя E_{zm}^2 по площади поперечного сечения, находим

$$P = \frac{1}{2\rho_0} \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda_e \lambda} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b B^2 \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{b} y dx dy = \frac{B^2}{8\rho_0} \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda_e \lambda} ab.$$

При сравнении колебаний различных типов иногда интересуются отношением передаваемой мощности на единицу площади поперечного сечения к квадрату максимальной амплитуды напряжённости электрического поля. Зная величины этих отношений, легко сопоставлять предельные и допустимые мощности. Результаты расчёта для различных видов колебаний сведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Вид колебаний	H_{01}	E_{11}	H_{11}
Отношение $\frac{P}{SE_{m0}^2}$	$\frac{1}{1510} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}$	$\frac{1}{3020} \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda}\right)^2 \times \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}$	$\frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}{3020 \left(\frac{a}{b}\right)^2} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}$

§ 4.10. УЧЕТ ПОТЕРЬ В СТЕНКАХ ВОЛНОВОДА

В реальных случаях стенки волновода обладают большой, но конечной проводимостью и оказывают сопротивление для протекающих по ним токов, т. е. в стенках имеют место потери мощности. Задача о прямоугольном волноводе с потерями новая и достаточно сложная задача с граничным условием $E_{\tau} \neq 0$. Однако в волноводах, применяемых на практике, проводимость стенок настолько высока, что тангенциальная составляющая E_{τ} у их поверхности мала и потери мощности в пределах одной ячейки длиной λ_g незначительны по сравнению с переносимой мощностью, поэтому структура каждой такой ячейки поля остаётся почти такой же, как и в случае идеально проводящих стенок.

Объёмное же распределение тока в металле вследствие малой глубины поверхностного слоя может быть приближённо сведено к поверхностному, свойственному волноводу без потерь. Это позволяет приближённо рассчитывать составляющие поля, пользуясь формулами идеального волновода. В частности, можно написать выражения для тангенциальных составляющих магнитного поля, а значит, и для плотностей поверхностного тока j_s , протекающего по стенкам. Отсюда, зная поверхностное сопротивление R_s , можно оценить потери при заданной величине проходящей мощности, а значит, и коэффициент затухания β . Изложенный метод расчёта является частным случаем метода последовательных приближений. Для случая малых потерь и при $\omega > \omega_{кр}$, как это было показано на примере системы плоскостей в § 2.15, достигается сов-

падение с результатами, полученными на основе точного решения. Доказательство допустимости использования первого приближения в общем случае было дано советским учёным С. М. Рытовым в 1940 г.

Приступая к расчёту потерь, найдём поверхностные токи по стенкам, пользуясь теорией идеального волновода

$$j_s = H_\tau.$$

Потери, приходящиеся на элемент боковой поверхности dS (рис. 4.27), определяются тогда из соотношения

$$dP_n = \frac{1}{2} J_{sm}^2 R_S dS, \quad (4.88)$$

где J_{sm} — амплитуда поверхностного тока,

R_S — поверхностное сопротивление проводника.

Пользуясь соотношением (4.88), рассчитаем мощность ΔP_n потерь в стенках, приходящуюся на элемент поверхности

$$dS = \Delta z dl,$$

где Δz — длина отрезка волновода ($\Delta z \ll \lambda_g$),

dl — элемент длины контура C поперечного сечения волновода.

Интегрируя по контуру, получим

$$\Delta P_n = \frac{1}{2} \oint_C J_{sm}^2 R_S dl \Delta z = \frac{1}{2} R_S \Delta z \oint_C H_{\tau m}^2 dl.$$

Отсюда можно найти мощность потерь на единицу длину

$$\frac{\Delta P_n}{\Delta z} = \frac{1}{2} R_S \oint_C H_{\tau m}^2 dl. \quad (4.89)$$

Здесь амплитуда $H_{\tau m}$ тангенциальной составляющей магнитного поля (как и амплитуды остальных составляющих) определяется

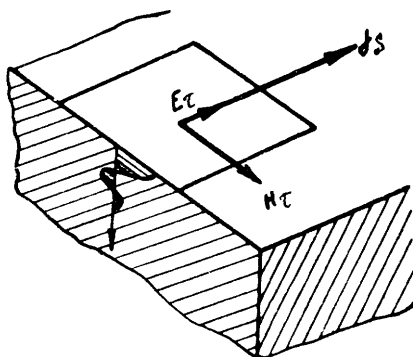


Рис. 4.27. К расчёту потерь на поверхности волновода

переносимой по волноводу мощностью. Последняя может быть найдена из выражения

$$P = \frac{1}{2} \rho \int_S H_{sm}^2 dS, \quad (4.90)$$

где ρ — волновое сопротивление для соответствующего типа колебаний,

H_{sm} — амплитуда поперечной составляющей магнитного поля, связанная определённым (для каждого типа волны) коэффициентом с амплитудой тангенциальной составляющей магнитного поля H_{tm} .

Считая, как и в § 4.15, что в системе с потерями поле убывает вдоль оси z по закону $e^{-\beta z}$, а переносимая мощность по закону $e^{-2\beta z}$, и учитывая, что $2\beta \Delta z \ll 1$, получим¹⁾

$$\Delta P_n = P (1 - e^{-2\beta \Delta z}) \approx 2P \beta \Delta z,$$

откуда

$$\beta = \frac{1}{2P} \frac{\Delta P_n}{\Delta z} = \frac{R_s}{2\rho} \frac{\oint_C H_{tm}^2 dl}{\int_S H_{sm}^2 dS}. \quad (4.91)$$

Из написанного выражения можно заключить, что *постоянная затухания β тем больше, чем сильнее концентрация магнитного поля у поверхности по сравнению с концентрацией его в объёме.*

Величина $R_s = \operatorname{Re} \frac{E_\tau}{H_\tau}$ рассчитывается по ф-лам (2.130) или (2.131), характерным для плоской однородной волны, входящей в металл. Как уже отмечалось в § 2.15, это связано с тем, что глубина проникновения весьма мала. Поэтому изменение поля в глубь металла во много раз больше, чем вдоль его поверхности (рис. 4.27). Следовательно, при расчёте поля в металле его изменением вдоль границы раздела (металл-диэлектрик) можно пренебречь, что соответствует замене волны, входящей в металл, плоской и однородной волной.

Значения глубины проникновения δ и активной составляющей поверхностного сопротивления R_s для наиболее часто встречающихся материалов приведены в табл. 4.3.

¹⁾ Можно было бы не задаваться законом изменения мощности $e^{-2\beta z}$, а учитывая, что $\Delta P_n = -\Delta P$, и формально обозначив правую часть соотношения (4.91) через β , прийти к дифференциальному уравнению $\frac{dP}{dz} + 2\beta P = 0$, которое даёт указанный закон изменения мощности и характеризует β как постоянную затухания.

Таблица 4.3

Материал	Удельная проводимость σ 1/ом.м	Магнитная проницаемость μ гн/м	Глубина проникновения δ мк	Активная составляющая поверхностного сопротивления R_S ом	Эффективное значение удельной проводимости $\sigma_{эфф}$ 1/ом. м
Серебро	$6,1 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$0,37 \sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$0,044/\sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$2,2 \cdot 10^7$
Медь	$5,5 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$0,39 \sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$0,047/\sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$3,5 \cdot 10^7$
Алюминий	$3,2 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$0,51 \sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$0,061/\sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$2 \cdot 10^7$
Латунь	$1,6 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$0,73 \sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$0,086/\sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$1,4 \cdot 10^7$
Припой	$0,7 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$1,1 \sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$0,130/\sqrt{\lambda_{с\mu}}$	$0,6 \cdot 10^7$

Данные таблицы показывают, что в реальных случаях значения глубины проникновения δ и активной составляющей поверхностного сопротивления R_S действительно малы: первые измеряются единицами микрона, вторые — сотыми долями ома.

В связи с малыми значениями глубины проникновения δ следует обратить внимание ещё на одно обстоятельство. Проведённый расчёт основан на предположении, что поверхность волновода является идеально гладкой

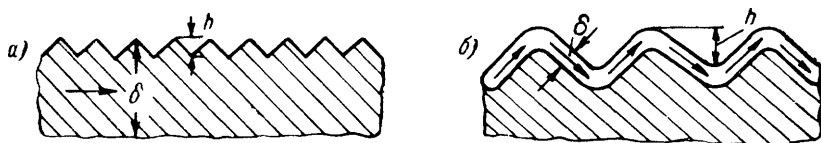


Рис. 4.28. Влияние неровностей на путь тока по поверхности металла:
а) случай, когда глубина проникновения δ больше размера неровностей h .
б) случай, когда глубина проникновения δ меньше размера неровностей h

Такое предположение вполне допустимо при исследовании полей в волноводе, поскольку неровности стенок на несколько порядков меньше размеров волновода и длины волны. Это предположение становится не вполне законным при расчёте потерь, если размеры неровностей соизмеримы с глубиной проникновения δ поля в металл. Рисунок 4.28 иллюстрирует влияние неровностей на путь тока по поверхности металла. Если глубина проникновения δ значительно больше глубины неровностей (рис. 4.28а), путь тока остаётся практически неизменным. Если же глубина проникновения δ меньше глубины неровностей (рис. 4.28б), путь тока удлиняется. Удлинение пути тока приводит к увеличению поверхностного сопротивления R_S . Вместо него в литературе иногда вводят эффективное значение удельной проводимости металла $\sigma_{эфф}$, которое учитывает описанное выше явление. Степень уменьшения эффективной проводимости по сравнению с обычной зависит от свойств металла и спо-

соба обработки поверхности. Необходимо отметить, что эффективная удельная проводимость серебра при обычной технологии его нанесения меньше чем у меди. Широкое использование серебрения в волноводной технике связано поэтому не с уменьшением потерь, а с антикоррозийными свойствами серебряного покрытия¹⁾. Примерные данные об эффективных удельных проводимостях приведены в табл. 4.3.

В реальных условиях эксплуатации возможно попадание в волновод влаги, которая конденсируется на его стенках и стекая с них, скапливается на участках снижения волноводного тракта. При этом структура поля в волноводе несколько искажается, а в конденсированном слое воды могут иметь место значительные потери энергии. Если толщина слоя влаги d' близка к четверти длины волны в воде, потери особенно велики, что приводит в ряде случаев к прекращению распространения электромагнитной энергии по волноводу. Резонансный слой воды приводит к значительным искажениям поля, которые сопровождаются концентрацией электрического поля в воде, что и является причиной больших потерь. Следует иметь в виду, что длина волны в воде в $\sqrt{\epsilon_r}$ меньше длины волны в воздухе, где для воды относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r \approx (70 \div 80)$. Даже небольшие скопления влаги таким образом, весьма нежелательны. Поэтому при конструировании аппаратуры принимаются специальные меры против конденсации влаги или для удаления её из волноводного тракта.

§ 4.11. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАТУХАНИЯ ДЛЯ ВОЛН ОСНОВНОГО И ВЫСШИХ ТИПОВ

Подставляя в выражение (4.91) значение R_s , найденное по ф-ле (2.131), используя для $\rho = \rho_H$ выражение (3.64) и замечая при этом, что для воздуха $\rho_0 \approx 120\pi$, получим

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{480\pi\lambda}} \frac{\lambda}{\lambda_s} \frac{\oint_c H_{zm}^2 dl}{\int_s H_{sm}^2 dS}. \quad (4.92)$$

Учитывая, что значения амплитуд составляющих поля волны H_{01}

$$H_{zm} = \frac{E_{xm}}{\rho_H} \frac{\lambda_s}{2b} \cos \frac{\pi}{b} y, \quad H_{ym} = \frac{E_{xm}}{\rho_H} \sin \frac{\pi}{b} y,$$

найдем:

$$\begin{aligned} \oint_c H_{zm}^2 dl &= 2 \int_0^b (H_{ym}^2 + H_{zm}^2) \Big|_{x=0} dy + 2 \int_0^a (H_{ym}^2 + H_{zm}^2) \Big|_{y=0} dx = \\ &= 2 \left(\frac{E_{xm}}{\rho_H} \right)^2 \frac{b}{2} + 2 \left(\frac{E_{xm}}{\rho_H} \frac{\lambda_s}{2b} \right)^2 \frac{b}{2} + 2 \left(\frac{E_{xm}}{\rho_H} \frac{\lambda_s}{2b} \right)^2 \frac{a}{2}, \\ \int_s H_{sm}^2 dS &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b H_{ym}^2 dx dy = \left(\frac{E_{xm}}{\rho_H} \right)^2 \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

¹⁾ Часто для предохранения от коррозии используется также покрытие внутренней поверхности волновода специальными антикоррозийными лаками

Отсюда

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{480\sigma\lambda}} \frac{\lambda}{\lambda_g} \left(\frac{\lambda_g}{2b} \right)^2 \frac{b \left(1 + \frac{4b^2}{\lambda_g^2} \right) + 2a}{ab}.$$

Введём вспомогательные обозначения. Отношение сторон волновода a и b обозначим

$$\frac{a}{b} = \eta, \quad (4.93)$$

а отношение рабочей длины волны генератора к критической длине волны

$$\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} = \frac{\lambda}{2b} = \xi. \quad (4.94)$$

Первый из введённых коэффициентов можно назвать *коэффициентом формы волновода*, а второй — *коэффициентом критичности рабочей длины волны*.

С учётом введённых коэффициентов выражение (4.92) для постоянной затухания волны основного типа можно записать в виде

$$\beta = \frac{C}{\sigma^{1/2} b^{3/2}} A, \quad (4.95)$$

где A — безразмерный коэффициент

$$A = \frac{1/\eta + 2\xi^2}{\sqrt{\xi - \xi^3}} \quad (4.96)$$

и C — постоянная

$$C = \frac{1}{\sqrt{240}} \approx 0,064. \quad (4.97)$$

Величина β в соотношении (4.95) получается в $неп/м$, если удельная проводимость σ выражена в $(ом.м)^{-1}$, а размер b в метрах. Замечая, что 1 $неп$ составляет примерно 8,7 $дб$, можно написать формулу для постоянной затухания

$$\beta \approx \frac{0,56}{\sigma^{1/2} b^{3/2}} A \frac{дб}{м}. \quad (4.98)$$

В качестве примера использования полученных формул приводится график (рис. 4.29) постоянной затухания β прямоугольного волновода с внутренними размерами $a = 3,4$ см, $b = 7,2$ см в функции длины волны λ . График рассчитан для волновода из меди. Как видно из графика, затухание имеет минимальное значение при

некоторой оптимальной длине волны и резко возрастает с увеличением длины волны по мере приближения её к $\lambda = \lambda_{кр}^1$). При длине волны генератора, короче оптимальной, затухание возрастает с уменьшением длины волны что связано с ростом поверхностного сопротивления R_s . На графике выделен *рабочий диапазон* волновода $0,5 < \lambda/2b < 0,9$. Область $\lambda/2b < 0,5$ является *нерабочей* как область высших типов колебаний. Область $\lambda/2b > 0,9$ также обычно не используется — в ней резко возрастает затухание в связи с приближением к критической частоте. В пределах же выделенного рабочего диапазона затухание изменяется примерно в два раза.

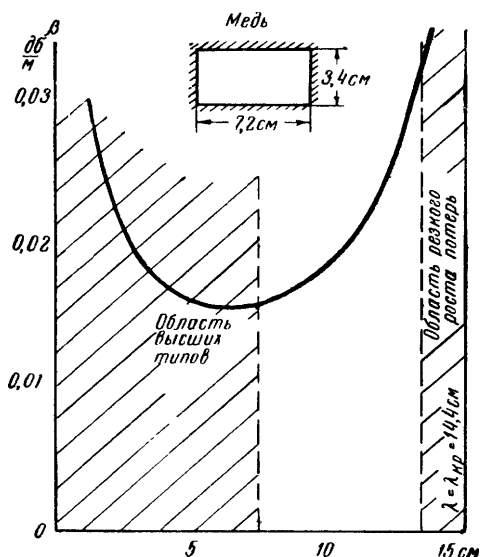


Рис. 4.29. Кривая $\beta = \beta(\lambda)$ для волны типа H_{01} , рассчитана для волновода с внутренними размерами $a = 3,4$ см, $b = 7,2$ см и для удельной проводимости меди $\sigma = 5,5 \cdot 10^7$ (ом.м) $^{-1}$

лена также и область $\xi < 0,5$ (т. е. $\lambda < b$). Наименьшие значения затухания (при условии приемлемого удаления от границ области высших типов) получаются ориентировочно в районе точки P , соответствующей $\xi = 0,7$ и $\eta = 0,5$ или $\lambda = 0,7\lambda_{кр}$ и $a = 0,5 b$.

До сих пор анализировался коэффициент затухания для волны основного типа H_{01} . Расчёт по ф-ле (4.91) для волны произволь-

¹) Более точно при $\lambda = \lambda_{кр}$ постоянная β не обращается в бесконечность, а имеет большое (по сравнению с β при $\omega > 1,1 \omega_{кр}$), но конечное значение (см. график, рис. 2.39).

²) Граница этой области определяется кривой $A(\xi, \eta)$ при $\eta = \xi$, т. е. кривой $A = \frac{1/\xi + 2\xi^2}{\sqrt{\xi - \xi^3}}$.

ного типа H_{mn} даёт следующее выражение для коэффициента затухания в неперах на единицу длины¹⁾

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{120 \sigma \lambda (1 - \xi^2)}} \left[(1 - \xi^2) \frac{a \epsilon_m n^2 + b \epsilon_n m^2}{a^2 n^2 + b^2 m^2} + \xi^2 \frac{a \epsilon_n + b \epsilon_m}{ab} \right]. \quad (4.99)$$

Здесь

$$\xi = \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

а числа ϵ_m и ϵ_n определяются из условия

$$\epsilon_n, \epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } n, m = 0, \\ 2 & \text{при } n, m \neq 0. \end{cases}$$

Для волны H_{01} ($m = 0$) формула приводит к ранее приведённым соотношениям, которые остаются справедливыми и для волн H_{0n} , если считать, что в этом случае $\xi = \lambda/\lambda_{кр} = \lambda_n/2b$.

Подобным же образом для волн E_{mn} можно получить

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{120 \sigma \lambda (1 - \xi^2)}} \frac{a^3 n^2 + b^3 m^2}{a^3 b n^2 + b^3 a m^2}. \quad (4.100)$$

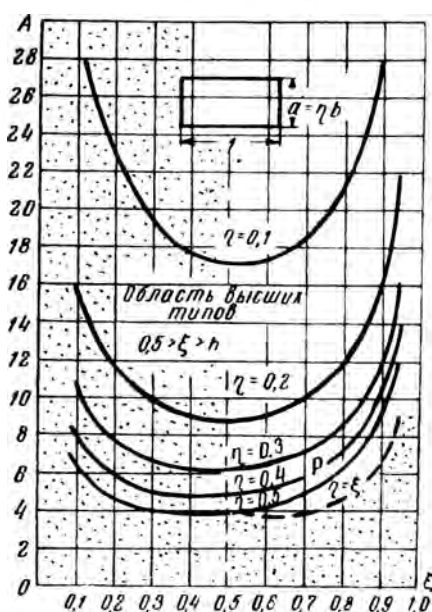


Рис. 4.30. График вспомогательной функции $A(\xi)$ для расчёта постоянной затухания β при различных значениях

$$\eta = \frac{a}{b}$$

На графике (рис. 4.31) представлены кривые изменения постоянной затухания β различных видов колебаний в функции от частоты генератора для квадратного медного волновода с внутренними размерами сечения $a=b=7,2$ см. Для каждого из видов колебаний затухание возрастает вблизи своей критической частоты, имеет минимум для некоторой частоты выше критической и далее вновь медленно возрастает с увеличением частоты в связи с увеличением поверхностного сопротивления R_s .

Из графика (рис. 4.31), как и из приведённых ранее ф-л (4.95), (4.99) и (4.100), следует, что волна основного типа H_{01} во всём диапазоне частот характеризуется *меньшей величиной постоянной затухания*, чем волны высших типов H_{11} и E_{11} .

¹⁾ Т. е. в неп/м, если a, b, λ выражены в метрах, а σ в (ом.м)⁻¹.

Вычисленные выше коэффициенты затухания можно использовать для расчёта коэффициента полезного действия отрезка

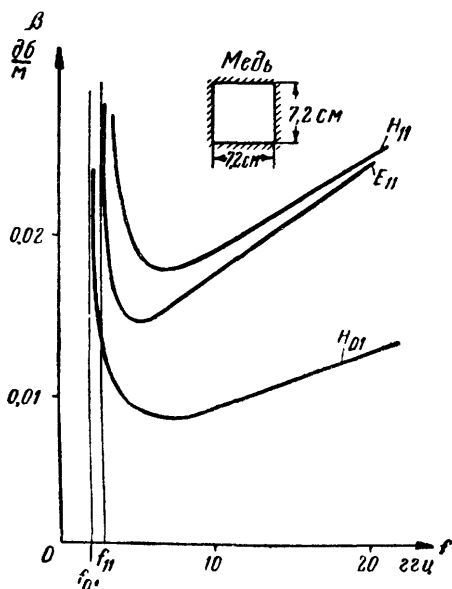


Рис. 4.31. Кривые $\beta = \beta(f)$ для различных типов волн в квадратном волноводе ($a=b=7,2$ см) при $\sigma = 5,5 \cdot 10^7$ (ом. м)⁻¹

волновода. Расчёт кпд при работе на одном типе колебаний производится так же, как и для линии с потерями,

$$\text{кпд} = \frac{1}{1 + \beta l (k_c + 1/k_c)} \quad (4.101)$$

где βl — затухание в неперлах, а k_c — коэффициент стоячей волны. Из ф-лы (4.101) видно, что с возрастанием коэффициента затухания β и коэффициента стоячей волны k_c кпд уменьшается.

§ 4.12. ВЫБОР РАЗМЕРОВ ВОЛНОВОДА

При выборе размеров волновода принимается во внимание ряд требований. Из них основными обычно являются:

- 1) работа на основном типе колебаний,
- 2) наивысшая предельная мощность,

¹⁾ Формула (4.101) выведена для однородного участка волновода и не учитывает потерь во фланцевых соединениях, предназначенных для сочленения отдельных отрезков волноводов (см. § 4.13). С учётом фланцевых соединений в ф-лу (4.101) можно подставлять значение $(\beta l)_{\text{экв}} = \beta l + n \beta_{\text{фл}}$, где $(\beta l)_{\text{кв}}$ — эквивалентное затухание с учётом фланцев, n — число фланцев, а $\beta_{\text{фл}}$ — потери на фланец в неперлах.

3) минимальный коэффициент затухания,

4) работа в диапазоне частот.

Перечисленные требования являются в известной мере противоречивыми, поэтому при выборе размеров идут на разумный компромисс между ними.

Исходя из требования работы на волне основного типа, следует обеспечить выполнение условий (4.69). С точки зрения увеличения предельной мощности отношение $\xi = \lambda/2b$ должно быть не слишком близко к единице, размер a (а также размер b) — возможно больше. К этому же сводится и требование минимального коэффициента затухания. Исходя из требования работы в диапазоне частот, при изменении длины волны генератора λ в определённых пределах не должно нарушаться ни одно из условий (4.69).

По совокупности первого, третьего и четвёртого требований, как это было показано при анализе графика (рис. 4.30), целесообразно выбрать $\xi \approx 0,7$, примерно посередине между крайними пределами, со сдвигом в меньшую сторону. К тому же ведёт и второе требование. Отношение сторон $a/b = \eta$ целесообразно брать порядка $0,4 \div 0,5$. При меньшем значении a уменьшится предельная мощность и увеличится затухание; при большем — граница области распространения волны H_{10} высшего типа на рис. 4.18 сдвинется вправо и рабочий диапазон волновода сузится.

Примерные выражения для выбора сторон волновода при заданной длине волны λ будут выглядеть так:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{\lambda}{2\xi} \approx \frac{\lambda}{1,4} \\ a &= \eta b \approx (0,4 \div 0,5)b \end{aligned} \right\}. \quad (4.102)$$

Иногда на более длинных волнах, когда предельная мощность и затухание не играют столь большой роли по сравнению с требованием уменьшения габаритов, размер a уменьшают и отношение a/b может быть значительно меньше 0,5.

С целью иллюстрации изложенного материала в табл. 4.4 сведены данные, приводимые в литературе для некоторых типов волноводов.

При составлении таблицы предельная напряжённость поля, соответствующая электрическому пробое, принята равной 30 кВ/см . Расчёт потерь произведён для медных стенок, исходя из значения удельной проводимости σ для постоянного тока. Реальные посеребрённые волноводы имеют затухание примерно на 60%, а латунные вдвое больше, чем медные. Максимальная длина волны принята на 10% меньше критической для колебаний основного типа. Минимальная длина волны взята на 1% выше критической для следующего более высокого типа колебаний. При

Таблица 4.4

Наружные размеры волновода мм	Толщина стенок мм	Коэффици- ент формы ¹⁾ η	Расчётная длина волны см	Расчётный коэффици- ент критич- ности ξ	Предельная мощность Мвт	Постоянная затухания дБ/м	Полоса про- пускания волновода см
76,2×38,1	2,00	0,47	10,00	0,70	10,5	0,0199	7,30—13,0
50,8×25,4	1,60	0,47	6,50	0,68	4,86	0,0310	4,80—8,50
38,1×19,05	1,60	0,46	5,00	0,72	2,29	0,0633	3,60—6,30
31,75×15,9	1,60	0,45	3,20	0,56	1,56	0,0725	2,90—5,10
25,4×12,7	1,25	0,44	3,20	0,70	0,99	0,1170	2,30—4,10
12,6×6,25	1,00	0,41	1,25	0,60	0,22	0,3460	1,07—1,90
72,5×12	1,23	0,14	10,0	0,72	2,77	0,0575	7,00—12,6

¹⁾ При расчёте по наружным размерам коэффициент формы для всех приведённых в таблице волноводов (за исключением последнего) равен 0,5

максимальной длине волны затухание примерно вдвое больше, а предельная мощность примерно вдвое меньше, чем при минимальной. Данные табл. 4.4 иллюстрируют вытекающее из теоретических формул положение, что при пропорциональном изменении размеров волновода и длины волны предельная мощность изменяется как λ^2 , а коэффициент затухания как $\lambda^{-3/2}$

§ 4.13. ПРИМЕРЫ КОНСТРУКЦИЙ ВОЛНОВОДНЫХ СЕКЦИЙ

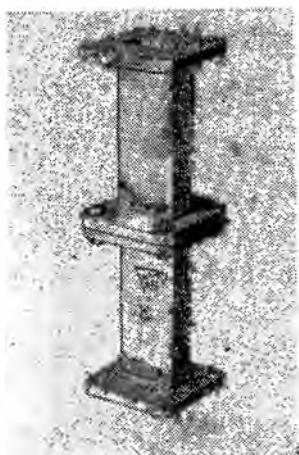
Для большего удобства монтажа и ремонта волновода собираются обычно из отдельных секций. Фотографии некоторых волноводных секций и их соединений показаны на рис. 4.32.

Простейшим волноводным соединением является *контактное*, осуществляемое при помощи фланцев, припаяваемых к концам волноводных секций. Для уменьшения неоднородности волноводного тракта в месте соединения и для снижения потерь фланцы плотно стягиваются болтами, а в лабораторных условиях специальными струбцинками (рис. 4.32а и б). Перед сборкой соединяющиеся поверхности должны очищаться для обеспечения хорошего контакта.

На практике часто применяют *дрессельно-фланцевое* или, иначе, *дрессельное* соединение. Фотография секции, предназначенной для дрессельно-фланцевого соединения, приведена на рис. 4.32в, а эскиз соединения представлен на рис. 4.33. Дрессельно-фланцевое соединение отличается наличием кольцевой канавки во фланце (глубина d , ширина x) и выточки в виде диска (ширина y , диаметр $2l+a$). Из рис. 4.33а видно, что в сечении канавка и вы-

точка образуют длинную линию, замыкающую разрыв между секциями волновода. Суммарная длина линии $d+l$ в плоскости разреза (рис. 4.33а) составляет около $\lambda/2$. Поэтому для продольных токов, на пути которых включена линия, её входное сопротивление пренебрежимо мало. Важно подчеркнуть, что это сопротивление остаётся малым и в том случае, если качество контакта несколько ухудшится (например, вследствие того, что для герметизации поставлена уплотняющая прокладка, вследствие неточной подгонки фланцев или небольших загрязнений соприкасающихся поверхностей). Конечно, во всех этих случаях *меняется величина контактного сопротивления*, но дело в том, что оно не включено

а)



б)

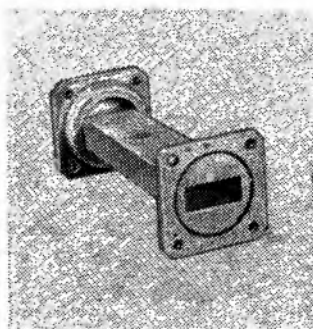
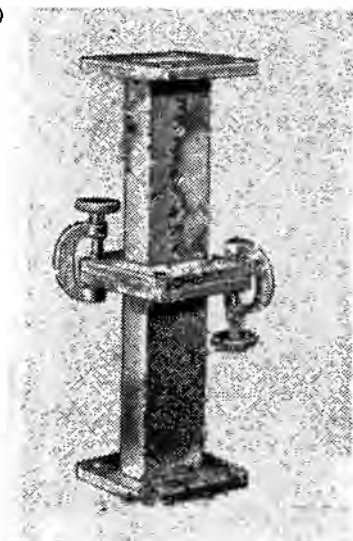


Рис. 4.32. Некоторые волноводные секции

непосредственно на пути сравнительно больших продольных токов волновода, а *отнесено в узел тока замыкающей линии*. С этой целью глубина кольцевой канавки d выбирается равной *примерно четверти длины волны $\lambda/4$* ¹⁾.

¹⁾ Точнее не $\lambda/4$, а $\lambda_g'/4$, где λ_g' — длина волны типа H_{11} в кольцевой канавке, как в коаксиальном волноводе (см. гл. 6), однако отличие пренебрежимо мало, так как в реальных случаях критическая длина волны колебаний H_{11} велика по сравнению с λ .

Несколько иначе это можно пояснить с точки зрения трансформации сопротивлений. Если входное сопротивление четверть-волнового отрезка линии длины d будет Z_d , а контактное сопротивление равно Z_k , то сопротивление на входе отрезка длины $l \approx \lambda/4$ будет

$$Z_l = \frac{\rho_l^2}{Z_d + Z_k}, \quad (4.103)$$

где ρ_l — волновое сопротивление отрезка l . Соотношение следует рассматривать как приближённое, например, относя все сопротивления к ленте, протяжённость которой перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 4.33а) равна единице. Из ф-лы (4.103) видно, что конечные значения Z_k при $Z_d \rightarrow \infty$ не играют роли, так как всё равно $Z_l \approx 0$.

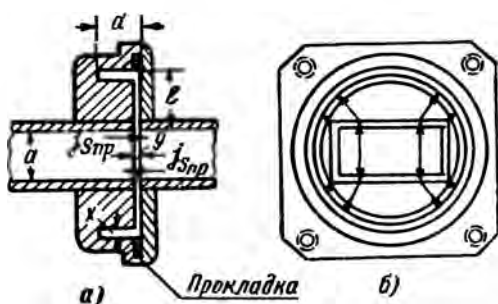


Рис. 4.33. Дроссельное соединение волноводных секций

Кольцевая форма канавки во фланце выбирается по технологическим соображениям, и, как показывает опыт, вполне допустима, несмотря на то, что расстояние от канавки до стенки волновода не является постоянным. Дело в том, что дроссельное соединение предназначено главным образом для того, чтобы создать нормальный путь *продольным* токам вдоль широкой стенки волновода. Поперечные токи и, в частности, токи вдоль узкой стенки не перерезаются в месте соединения, и поэтому нет необходимости обеспечить действие дросселя для таких токов.

Размеры дроссельного соединения уточняются экспериментально. Можно показать, что диапазонность дроссельного соединения увеличивается, если соблюдается соотношение размеров $x > y$, где x — ширина канавки, а y — глубина выточки. Последнее связано с тем, что при $x > y$ волновое сопротивление $\rho_d > \rho_l$, что ведёт к увеличению $|Z_d| = \rho_d \operatorname{tg} \alpha d$ в выражении (4.103) и, значит, в более широком диапазоне частот величина $|Z_l|$ будет достаточно мала. Практически размер x берётся в 2—5 раз больше, чем y . Описанные в литературе конструкции дроссельных соединений дают значения ширины полосы пропускания на длине вол-

ны $\lambda = 10$ см порядка $\pm 15\%$ ($x/y \approx 5$) и на длине волны $\lambda = 3$ см порядка $\pm 6\%$ ($x/y = 2$). Края полосы пропускания измеряются при этом по значению коэффициента стоячей волны, равному 1,05, после того, как в согласованный ранее волновод вводится одно дроссельное соединение. Оказывается, что дроссельное соединение нормально работает даже при появлении зазора между фланцами до $\lambda/16$.

Для изменения направления волноводов при их монтаже применяют специальные *изогнутые секции*, включаемые между прямолинейными участками волновода (рис. 4.34). Такие секции могут быть изогнуты как в плоскости магнитного, так и в плоскости электрического полей (рис. 4.35). Ещё чаще вместо поворота используется *излом волновода*, а соответствующие секции называются *волноводными уголками* (рис. 4.36).

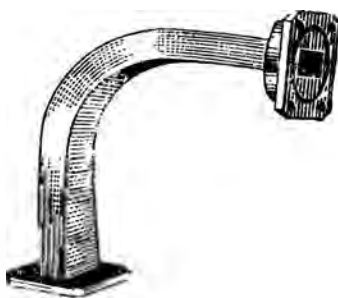


Рис. 4.34. Изогнутая секция волновода

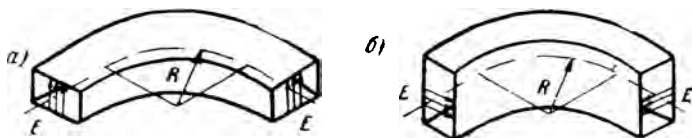


Рис. 4.35. Изогнутые секции волновода;
а) поворот в плоскости H ; б) поворот в плоскости E

При этом стремятся либо сделать изменение направления волновода очень плавным, либо добиться компенсации отражений от отдельных участков, для чего специально подбирают размеры каждого переходного участка.

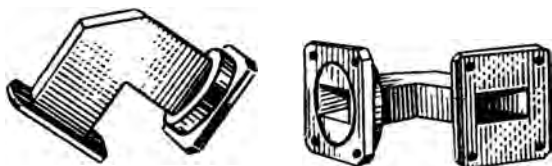


Рис. 4.36. Волноводные уголки

Для изменения направления вектора электрического поля в прямоугольном волноводе используются *скрученные секции* (рис. 4.37).

Длина скрученного участка при повороте на 90° берётся не менее двух длин волн в волноводе. Этот участок лучше всего согласуется, когда его длина равна целому числу полуволен в вол-

новом. Полоса пропускания скрученного участка имеет порядок $\pm 6\%$.

Наряду с жёсткими волноводными секциями находят применение *секции гибкого волновода*. Эти секции используются для временной замены повреждённых участков, для присоединения измерительных приборов, для соединения жёстко смонтирован-

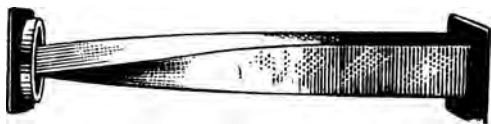


Рис. 4.37. Скрученная секция прямоугольного волновода

ных участков тракта, для соединения частей установки, вибрирующих друг относительно друга. Существует много конструкций гибких волноводов, одна из которых показана на рис. 4.38.



Рис. 4.38. Секция гибкого волновода (бесшовный гофрированный волновод)

При соединении согласованной нагрузки через гибкий волновод коэффициент стоячей волны в главном волновом будет порядка 1,1 — 1,5. Потери в гибких трёхсантиметровых волноводах на единицу длины примерно в два раза больше, чем в жёстких.

§ 4.14. ВОЛНОВЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПО НАПРЯЖЕНИЮ И ТОКУ, МОЩНОСТИ И ТОКУ, НАПРЯЖЕНИЮ И МОЩНОСТИ

Волновое сопротивление по полю для волны основного типа

$$\rho = \rho_H = \frac{E_S}{H_S} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2}}$$

зависит от длины волны λ и размера широкой стенки волновода b . Зная это сопротивление, ещё нельзя дать прямого ответа о том, как будет меняться режим согласования волновода, например, при изменении размера узкой стенки волновода a . Дело в том, что строго такая задача решается с учётом наложения как

основного, так и высших типов колебаний, что несколько более подробно иллюстрируется в гл. 8 и 9.

Иногда для *ориентировочной* оценки режимов согласования вводят новые виды волновых сопротивлений, которые учитывают влияние размера узкой стенки волновода. Исходными при этом являются:

1) выражение для максимальной амплитуды напряжения

$$U_m = aE_{xm},$$

2) выражение для амплитуды суммарного поверхностного тока по продольной стенке

$$I_m = b j_{sz} = H_{ym} \int_0^b \sin \frac{\pi}{b} y dy = \frac{2}{\pi} \frac{E_{xm} b}{\rho_H},$$

3) выражение (4.77) для переносимой при бегущей волне мощности.

Тогда *волновое сопротивление по напряжению и току* для волны H_{01} определяется следующим образом

$$\rho_{U,I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\pi}{2} \rho_H \frac{a}{b}. \quad (4.104)$$

Аналогично вводятся и рассчитываются волновые сопротивления *по мощности и току и по напряжению и мощности*:

$$\rho_{P,I} = \frac{2P}{I_m^2} = \frac{2}{I_m^2} \frac{E_{xm} ab}{4\rho_H} = \frac{\pi^2}{8} \rho_H \frac{a}{b}, \quad (4.105)$$

$$\rho_{U,P} = \frac{U_m^2}{2P} = \frac{a^2 E_{xm}^2}{2} \frac{4\rho_H}{E_{xm}^2 ab} = 2\rho_H \frac{a}{b}. \quad (4.106)$$

В любое из указанных сопротивлений входит отношение a/b , которое меняется при изменении формы поперечного сечения. Различие числовых коэффициентов в выражениях (4.105) и (4.106) не играет существенного значения, поскольку режимы работы элементов волноводного тракта зависят от *соотношения* волновых сопротивлений.

Если об этом не будет оговорено особо, волновое сопротивление будет в дальнейшем пониматься как сопротивление по полю; им можно пользоваться не только для основного, но вообще, для произвольного типа волны.

§ 4.15. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Иногда отступают от общего правила, согласно которому размеры волновода выбираются так, чтобы по нему распространялся только один основной тип волны. Как показывается далее, при этом можно значительно увеличить предельную мощность волновода. В литературе описаны волноводы *квадратного* сечения, в которых *колебания H_{01} и H_{10} равноправны между собой*. Если размеры волновода удовлетворяют условию

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}} < b = a < \lambda, \quad (4.107)$$

кроме этих двух типов волн, другие типы распространяться не будут.

Рисунок 4.39 иллюстрирует образование интерференционного поля при одновременном возбуждении полей H_{01} и H_{10} равной амплитуды. Поля возбуждаются одинаковыми штырями, расположенными во взаимно-перпендикулярных стенках волновода, питание к которым подаётся через коаксиальный кабель от общего генератора. Изменяя длину отрезков кабеля, подводящего питание к штырям, можно менять разность фаз ψ возбуждаемых полей. При синфазном питании ($\psi=0$) получается *линейная поляризация* (рис. 4.40а). При квадратурном питании $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ в цент-

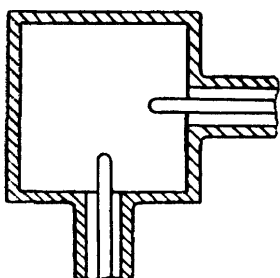


Рис. 4.39. Схема одновременного возбуждения полей H_{01} и H_{10} в квадратном волноводе

ре поперечного сечения получается *круговая поляризация*, «правая» или «левая», в зависимости от знака ψ (рис. 4.40б и в). При противофазном питании снова получается *линейная поляризация*, но плоскость поляризации электрического вектора будет повернута в пространстве на 90° по отношению к случаю, когда $\psi=0$ (рис. 4.40г). В общем случае — поляризация *эллиптическая* (рис. 4.40д).

Нетрудно убедиться, что каждый из типов волн H_{01} и H_{10} переносит энергию независимо от другого¹⁾. Поскольку в рассматриваемом случае компоненты E_x и H_y относятся к волне H_{01} , а компоненты E_y и H_x — к волне H_{10} , то

$$H_y = \frac{E_x}{\rho_H}, \quad \text{а} \quad H_x = -\frac{E_y}{\rho_H},$$

¹⁾ В более общей форме это рассматривается также в гл 8 (§ 84).

так что составляющая вектора плотности потока энергии вдоль оси волновода

$$S_z = [(x^0 E_x + y^0 E_y)(x^0 H_x + y^0 H_y)]_z = \frac{E_x^2}{\rho_H} + \frac{E_y^2}{\rho_H}.$$

Таким образом, плотности потоков энергии волн H_{01} и H_{10} суммируются в каждой точке поперечного сечения. Поэтому суммируются и мощности, переносимые по всему сечению. В част-

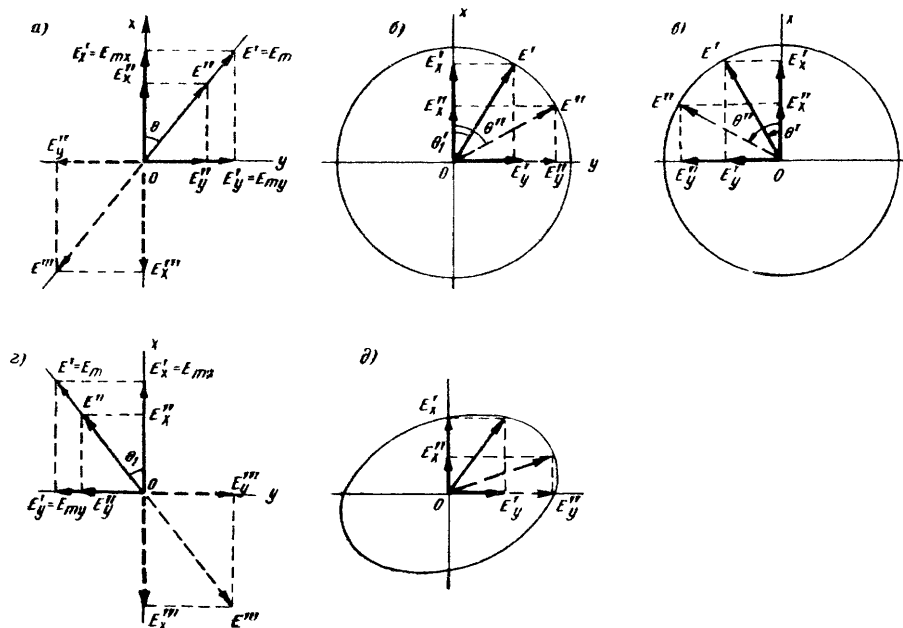


Рис. 4.40. Сложение двух взаимно-перпендикулярных полей. Случай линейной, круговой и эллиптической поляризации

ности, при равенстве амплитуд полей H_{01} и H_{10} переносимая мощность *удваивается* по сравнению с мощностью, переносимой какой-либо одной волной.

Отсюда следует, что при использовании поляризационных явлений в некоторых случаях открывается возможность увеличить предельную мощность волновода $P_{пред}$ при неизменной величине предельной напряжённости электрического поля $E_{пред}$.

Последнее не удаётся, например, в случае линейной поляризации. При наложении равных по амплитуде полей волн H_{01} и H_{10} амплитуда результирующего поля увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, т. е. пропорционально корню из передаваемой мощности. Выигрыша, равно как проигрыша, в предельной мощности в этом случае не

получается. Наоборот, при *круговой* поляризации удвоение передаваемой мощности, как это видно из рис. 4.40, *не сопровождается увеличением максимальной амплитуды поля*. Поэтому при той же предельной напряжённости электрического поля получается *выигрыш в предельной мощности в два раза*. Если же учесть, кроме того, что площадь поперечного сечения квадратного волновода может быть взята примерно в два раза больше, чем площадь прямоугольного, выигрыш в предельной мощности будет в четыре раза.

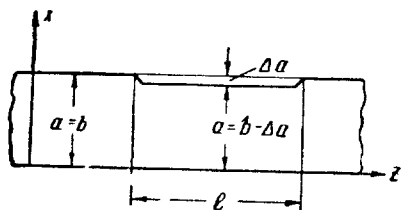


Рис. 4.41. Деформированный квадратный волновод

где на участке волновода длиной l размер $a=b-\Delta a$ уменьшен по сравнению с размером b на величину Δa . При этом постоянная распространения α_1 для волны H_{10} отличается от постоянной распространения α для волны H_{01} на величину $\Delta \alpha^1$. Если на входе участка колебания H_{01} и H_{10} синфазны, то на выходе они сдвинуты по фазе на угол

$$\psi = \Delta \alpha l. \quad (4.108)$$

На протяжении однородного участка сдвиг фаз ψ сохраняется. Неоднородный участок волновода является, таким образом, *преобразователем вида поляризации*. Подбирая специальные искусственные неоднородности, можно использовать их в качестве поляризаторов. Случайные неоднородности могут приводить к нежелательным преобразованиям поляризации, поэтому в случае использования квадратного волновода следует предъявлять высокие требования к точности его изготовления.

§ 4.16. ПОЛЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ ЧАСТОТЕ НИЖЕ КРИТИЧЕСКОЙ

Общие представления о нераспространяющихся полях важны потому, что последние при своём наложении описывают структуру результирующего электромагнитного поля в окрестности неоднородностей. Кроме того, нераспространяющиеся поля используются в измерительной технике в специальных устройствах, называемых *предельными аттенуаторами (ослабителями)*. Математические выражения для нераспространяющихся полей можно получить из соотношений § 4.3, полагая $\omega < \omega_{кр}$ и $\gamma = \beta$, где β — вещественное число.

Характерными особенностями нераспространяющихся полей являются:

¹⁾ Дифференцируя выражение для фазовой постоянной, можно получить

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \left(\frac{\lambda_g}{2b} \right)^2 \frac{\Delta a}{a}.$$

1) экспоненциальный закон убывания амплитуд поля по обе стороны от неоднородности, являющейся местом их возникновения;

2) сдвиг по фазе составляющих электрического и магнитного полей, который при отсутствии потерь энергии равен 90° ;

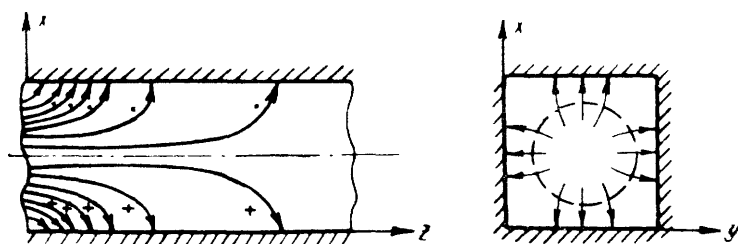


Рис. 4.42. Поле волны E_{11} при $\omega < \omega_{кр}$

3) неравенство энергий связанных между собой электрического и магнитного полей: у волн типа E преобладает электрическая, у волн типа H магнитная энергия¹⁾.

На рис. 4.42 показано распределение электромагнитного поля волны E_{11} в прямоугольном волноводе при $\omega < \omega_{кр}$. Распределение такого вида создаётся на частоте ниже критической в окрестности продольного возбуждающего штыря. На рис. 4.43 показано подобное же распределение поля при $\omega > \omega_{кр}$ для волны H_{01} . Такое распределение создаётся в окрестности поперечного штыря, вокруг которого замыкаются линии магнитного поля. В обоих случаях имеется в виду лишь примерное описание результирующего поля, поскольку точное описание получается при учёте наложения волн различных видов.

Конструкции предельных аттенуаторов будут описаны в следующей главе, ввиду того что в качестве таких аттенуаторов используются главным образом отрезки круглых волноводов.

¹⁾ В последнем можно убедиться, вычисляя средние плотности энергии на единицу длины W_E и W_M , пользуясь ф-лой (3.67).

Как при $\omega > \omega_{кр}$, так и при $\omega < \omega_{кр}$ результат расчёта для волн H можно записать в виде

$$\frac{W_M}{W_E} = \frac{|\gamma|^2 + k^2}{\omega^2 \epsilon \mu}.$$

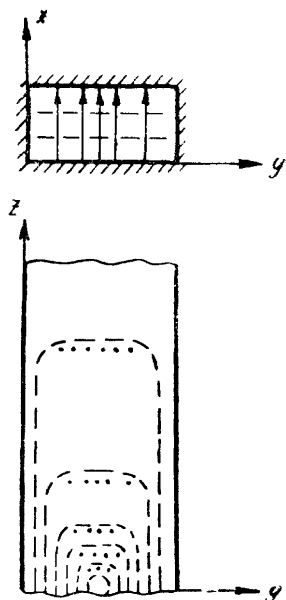


Рис. 4.43. Поле волны H_{01} при $\omega < \omega_{кр}$

Числитель равен $(\omega^2 \epsilon \mu - k^2) + k^2$ при $\omega > \omega_{кр}$ и $(k^2 - \omega^2 \epsilon \mu) + k^2$ при $\omega < \omega_{кр}$. В первом случае отношение W_M/W_E равно единице, во втором оно равно $2(\omega_{кр}/\omega)^2 - 1$ и больше единицы. Чем ниже частота ω , тем для волн типа H значение W_E меньше по сравнению с W_M .

ГЛАВА 5

КРУГЛЫЕ ВОЛНОВОДЫ

§ 5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Наряду с прямоугольными волноводами, широкое использование находят круглые волноводы (рис. 5.1).

Отрезки круглого волновода применяются как элементы вращающихся сочленений, предназначенных для передачи электромагнитной энергии от неподвижных волноводов к подвижным.

Они могут быть использованы как облучатели антенн. Закороченные с двух сторон отрезки круглого волновода часто используются в качестве полых электромагнитных резонаторов. В некоторых случаях весь волноводный тракт может быть целиком составлен из отрезков круглого волновода.

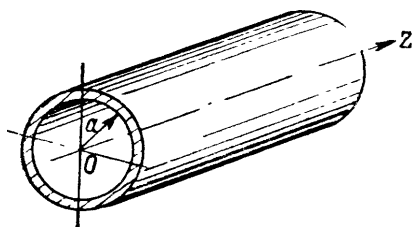


Рис. 5.1. Круглый волновод

Расчет полей в круглом волноводе начнем с решения мембранного уравнения при заданных нулевых граничных условиях на контуре C поперечного сечения, имея в виду волны H и E в волноводе без потерь. Далее будет учтено влияние потерь и деформаций стенок волновода.

§ 5.2. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ МЕМБРАННОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

При нахождении частных решений мембранного уравнения

$$\nabla_S^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (5.1)$$

будут рассматриваться два случая нулевых граничных условий на контуре C поперечного сечения:

1-й случай: $\psi = 0$ на контуре C ,

2-й случай: $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ на контуре C .

Поскольку контуром поперечного сечения является окружность, целесообразно использовать в этом сечении полярную систему координат r, φ (рис. 5.2), а для всего волновода в целом — цилиндрическую систему координат r, φ, z (рис. 5.1). На рис. 5.2 показаны единичные векторы $\mathbf{r}^0$ и φ^0 , направленные в сторону возрастания соответствующих координат.

Оператор Лапласа ∇_S^2 в полярной системе координат определяется выражением

$$\nabla_S^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (5.2)$$

так что мембранное уравнение (5.1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (5.3)$$

Используя метод разделения переменных, частное решение записываем в виде произведения двух функций

$$\psi(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi), \quad (5.4)$$

где $R(r)$ — функция радиального распределения, $\Phi(\varphi)$ — функция углового распределения.

Для определения этих функций достаточно подставить уравнение (5.4) в (5.3). Тогда получим

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Phi + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 R \Phi = 0.$$

Поделив написанное равенство почленно на выражение $\frac{R\Phi}{r^2}$ и собирая члены, зависящие от r , найдём

$$\frac{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 R}{R} + \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = 0.$$

Найденное выражение представляет собой сумму функций двух независимых переменных, равную нулю,

$$F_1(r) + F_2(\varphi) = 0,$$

так, что $F_1(r) = -F_2(\varphi)$. Последнее может иметь место только в том случае, если каждая из функций порознь равна постоянной

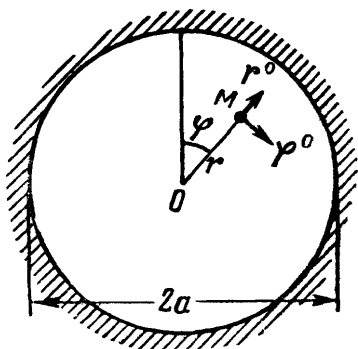


Рис. 5.2. Контур поперечного сечения и единичные векторы в полярной системе координат

величине. Обозначая постоянные соответственно p^2 и $-p^2$, получим

$$\frac{r^2 \frac{dr^2}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 R}{R} = p^2,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -p^2.$$

Мембранное уравнение разбилось, таким образом, на два независимых уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + p^2 \Phi = 0, \quad (5.5)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - p^2) R = 0. \quad (5.6)$$

Решением ур-ния (5.5) будет функция

$$\Phi(\varphi) = A_1 \cos p\varphi + A_2 \sin p\varphi = A \cos p(\varphi - \varphi_0), \quad (5.7)$$

где A и φ_0 (равно как A_1 и A_2) — произвольные постоянные.

Уравнение (5.6) является уравнением Бесселя. Его решение имеет вид

$$R(r) = B_1 J_p(kr) + B_2 Y_p(kr), \quad (5.8)$$

где

$J_p(u)$ — функция Бесселя 1-го рода p -го порядка,

$Y_p(u)$ — функция Бесселя 2-го рода p -го порядка.

Числа p и k , входящие в общее решение, выбираются в соответствии с *граничными условиями* и характерным для круглой формы сечения *условием периодичности*.

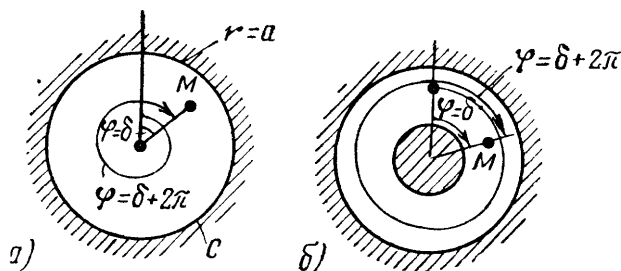


Рис. 5.3. К использованию условия периодичности
а) для круга; б) для кольца (см. гл. 6)

Как видно из рис. 5.3а, при изменении угловой координаты $\varphi = \delta$ на $\varphi = \delta + 2\pi$ значение поля не меняется, поэтому можно написать, что

$$\Phi(\delta + 2\pi) = \Phi(\delta), \quad (5.9)$$

откуда видно что функция $\Phi(\delta)$ должна быть периодической. Подставляя в соотношение (5.9) значение (5.7) этой функции, получим

$$\cos p[(\delta + 2\pi) - \varphi_0] = \cos p(\delta - \varphi_0),$$

а преобразуя разность косинусов, найдём

$$2 \sin p \pi \sin p(\delta - \varphi_0 + \pi) = 0.$$

Поскольку в силу произвольности δ последний множитель в левой части равенства в общем случае отличен от нуля, то $\sin p\pi = 0$, т. е. $p = m$, где m — целое число ($m = 0, 1, 2, \dots$), что является следствием условия периодичности.

Выражение для функции углового распределения $\Phi(\varphi)$ окончательно имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (5.10)$$

Графики этой функции для различных значений m представлены на рис. 5.4, где они отложены вдоль периметра волновода. Число m при этом показывает, сколько целых стоячих волн поля

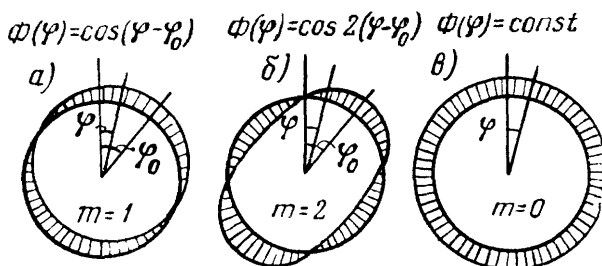


Рис. 5.4 График функции распределения по угловой координате φ

укладывается по окружности волновода. Начальный угол φ_0 характеризует положение максимума функции $\Phi(\varphi)$ по окружности волновода (т. е. угловую координату максимума соответствующей продольной составляющей поля).

Радиальное распределение определяется функциями Бесселя, порядок которых выражается целым числом

$$R(r) = B_1 J_m(kr) + B_2 Y_m(kr). \quad (5.11)$$

Характерно, что порядок бesselевых функций всегда равен числу целых волн поля вдоль окружности волновода.

Графики функции Бесселя 1-го и 2-го рода $J_m(u)$ и $Y_m(u)$ для целочисленных m представлены на рис. 5.5 и 5.6.

Функции Бесселя 1-го рода $J_m(u)$ имеют вид затухающих осциллирующих кривых. При малых значениях аргумента ход кривой $J_0(u)$ напоминает косинусоиду, ход кривой $J_1(u)$ — синусо-

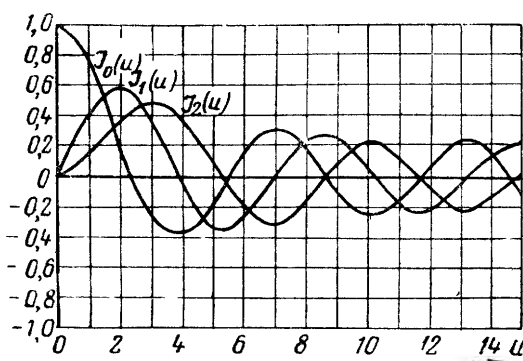


Рис. 5.5. Графики функций Бесселя 1-го рода $J_m(u)$ нулевого, 1-го и 2-го порядка

соиду, а кривые более высоких порядков, начиная с $m=2$, имеют при малых u параболический участок. Для больших значений аргумента все кривые напоминают затухающие синусоидальные кривые

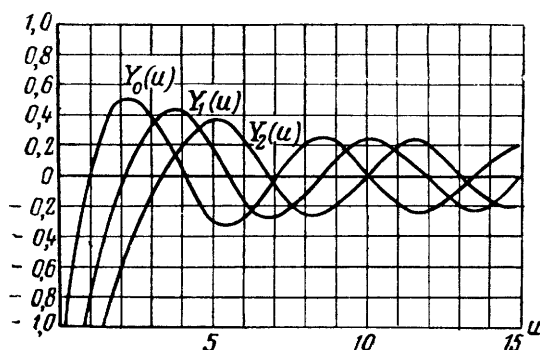


Рис. 5.6. Графики функций Бесселя 2-го рода $Y_m(u)$ нулевого, 1-го и 2-го порядка

Функции Бесселя 2-го рода $Y_m(u)$ при больших значениях аргумента также имеют характер затухающих синусоидальных кривых. С уменьшением же u они резко возрастают по абсолютной величине, так что

$$\lim_{u \rightarrow 0} |Y_m(u)| = \infty.$$

Известно между тем, что поле внутри волновода должно быть конечным при всех $r \leq a$, в том числе при $r=0$. Тогда, если $B_2 \neq 0$, возникает противоречие: левая часть выражения (5.11) конечна при $r=0$, правая часть обращается при $r=0$ в бесконечность. Мы приходим к выводу, что коэффициент B_2 обязательно должен быть равен нулю, т. е. решение *определяется лишь бесселевой функцией первого рода*¹⁾. Второе слагаемое в соотношении (5.11) следует учитывать лишь в тех случаях, когда точка начала координат $r=0$ не входит в область исследуемого электромагнитного поля, например, для случая коаксиального кабеля (рис. 5.3б).

Итак, для односвязного контура в виде окружности решение мембранного уравнения имеет вид

$$\psi(r, \varphi) = B J_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (5.12)$$

Значение собственных чисел k мембранного уравнения определяется при этом из неиспользованного ещё граничного условия ($\psi = 0$ или $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$) при $r = a$.

§ 5.3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ И КРИТИЧЕСКИЕ ДЛИНЫ ВОЛН ТИПА E В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Продольная составляющая электрического поля E_z для волны E определяется из соотношения

$$E_z = E'_z(r, \varphi) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (5.13)$$

где в соответствии с решением мембранного уравнения (5.12)

$$E'_z(r, \varphi) = \psi(r, \varphi) = B J_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (5.14)$$

Соотношения (5.13) и (5.14) характеризуют распределение продольного электрического поля в волноводе. При $\omega > \omega_{кр}$ распределение поля вдоль волновода подчиняется закону бегущей волны, в то время как распределение поля в поперечном сечении подчинено закону стоячей волны. При этом вдоль окружности волновода укладывается m целых волн поля, а распределение поля по радиусу описывается бесселевой функцией m -го порядка.

¹⁾ Вывод о равенстве нулю коэффициента B_2 можно сделать также, если соотношение (5.11) поделить на $Y_m(kr)$ и перейти к пределу при $r \rightarrow 0$. Поскольку $\lim_{r \rightarrow 0} |Y_m(kr)| = \infty$, а выражения $J_m(0)$ и $R(0)$ имеют конечные значения, то следует, что $B_2 = 0$.

Масштабный множитель k , соответствующий радиальному распределению поля (т. е., иначе, собственное число мембранного уравнения 5.1), определяется из граничного условия

$$E_z' = 0 \text{ при } r = a, \quad (5.15)$$

откуда

$$J_m'(ka) = 0. \quad (5.16)$$

Это значит, что произведение ka должно быть одним из корней бесселевой функции m -го порядка

$$ka = u_{mn}, \quad (5.17)$$

где индекс m показывает порядок бесселевой функции или число стоячих волн поля вдоль окружности волновода, а индекс n — номер корня (также характеризующий распределение поля стоячей волны, но вдоль радиуса).

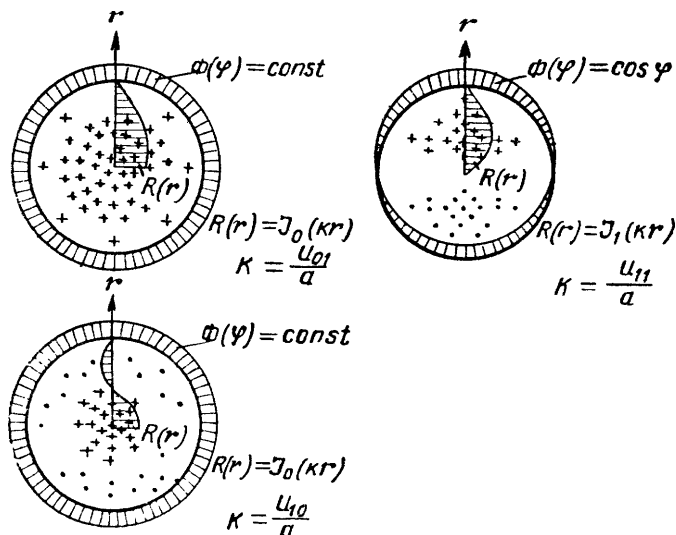


Рис. 5.7. Распределение продольной составляющей электрического поля E_z для волн E_{01} , E_{11} и E_{02} в круглом волноводе

В зависимости от индексов m и n волны E в круглых волноводах обозначают E_{mn} . Примеры распределения продольной составляющей поля E_z в плоскости поперечного сечения волновода для волн E_{01} , E_{02} , E_{11} показаны на рис. 5.7.

Значения корней бесселевых функций определяются из специальных таблиц корней (табл. 5.1) или из графиков бесселевых функций (рис. 5.6).

Таблица 5.1

n	Корни уравнения $J_m(u) = 0$ при m					
	0	1	2	3	4	5
1	2,405	3,832	5,135	6,379	7,586	8,771
2	5,520	7,016	8,417	9,760		
3	8,654	10,173	11,620			
4	11,792	13,324				
5	14,931					

Зная собственное число мембранного уравнения

$$k_{mn} = \frac{u_{mn}}{a} \quad (5.18)$$

для соответствующего типа колебаний, можно найти постоянную распространения

$$\gamma_{mn}^2 = k_{mn}^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

и критическую длину волны, которая соответствует значению постоянной распространения $\gamma = 0$,

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi}{k_{mn}} = \frac{2\pi a}{u_{mn}}. \quad (5.19)$$

Значения критической длины волны при заданном радиусе a волновода для некоторых видов колебаний сведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Тип колебаний	E_{mn}	E_{01}	E_{11}	E_{21}	E_{02}
Значение корня бесселевой функции	u_{mn}	2,405	3,832	5,135	5,520
Критическая длина волны	λ_{mn}	2,613 a	1,640 a	1,224 a	1,138 a

Зная выражение для продольной составляющей электрического поля E_z и пользуясь найденными значениями собственных чисел $k = k_{mn}$, можно перейти к расчёту поперечных составляющих поля.

Поперечную составляющую электрического поля E_S можно найти по формуле

$$E_S = r^0 E_r + \varphi^0 E_\varphi = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad}_S E_z.$$

Выражение для градиента функции в полярной системе координат, необходимое для расчёта по этой формуле, имеет вид

$$\text{grad}_S \psi = \mathbf{r}^0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \varphi^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (5.20)$$

где $\mathbf{r}^0$ и φ^0 — единичные векторы, направленные в сторону возрастания координат r и φ .

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\gamma}{k} B J_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t - \gamma z} \\ E_\varphi &= \frac{m\gamma}{k} B \frac{J_m(kr)}{kr} \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t - \gamma z} \end{aligned} \right\}. \quad (5.21)$$

Чтобы найти далее поперечную составляющую магнитного поля напишем

$$\mathbf{H}_S = \mathbf{r}^0 H_r + \varphi^0 H_\varphi = \frac{1}{\rho_E} [\mathbf{z}^0 \mathbf{E}_S] = \frac{1}{\rho_E} \{ [\mathbf{z}^0 \mathbf{r}^0] E_r + [\mathbf{z}^0 \varphi^0] E_\varphi \}.$$

Поскольку при выбранных на рис. 5.2 положительных направлениях единичных векторов $\mathbf{r}^0$ и φ^0

$$[\mathbf{z}^0 \mathbf{r}^0] = \varphi^0,$$

$$[\mathbf{z}^0 \varphi^0] = -\mathbf{r}^0,$$

отсюда находим.

$$H_\varphi = \frac{1}{\rho_E} E_r,$$

$$H_r = -\frac{1}{\rho_E} E_\varphi. \quad (5.22)$$

Переходя далее к окончательным выражениям для составляющих электромагнитного поля волн типа E в тригонометрической форме, полагаем $\omega > \omega_{kp}$ (а $\gamma = i\alpha$) и будем считать коэффициент B вещественным. Взяв реальную часть от соотношений (5.13), (5.14) (5.21), (5.22) и имея в виду, что

$$\frac{\alpha}{k} = \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_g},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned}
 E_z &= B J_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) \cos(\omega t - \alpha z) \\
 E_r &= \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_g} B J'_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) \sin(\omega t - \alpha z) \\
 E_\varphi &= -m \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_g} B \frac{J_m(kr)}{kr} \sin m(\varphi - \varphi_0) \sin(\omega t - \alpha z) \\
 H_\varphi &= \frac{1}{\rho_E} E_r \\
 H_r &= -\frac{1}{\rho_E} E_\varphi \\
 H_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

§ 5.4. СТРУКТУРА ПОЛЯ ВОЛН ТИПА E . ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЛНЫ E ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СОЧЛЕНЕНИЯХ

В качестве примера распределений поля волн типа E в круглом волноводе рассмотрим поля волн E_{01} и E_{11} .

На рис. 5.8а представлено распределение продольной составляющей электрического поля E_z в плоскости поперечного сечения для волны E_{01} . При $m=0$ распределение является равномерным по угловой координате φ . В радиальном направлении оно характеризуется одной вариацией поля от некоторого конечного значения до нуля ($n=1$). На том же рисунке показано направление линий электрического поля, определяемое знаком произведения множителей распределения $R(r)\Phi(\varphi)$. Предполагается, что приведенная на рис. 5.8а картина поля соответствует сечению $I-I$, для которого поперечная составляющая поля равна нулю [$\sin(\omega t - \alpha z) = 0$]. В соответствии с рис. 5.8а линии электрического поля образуют «продольный жгут», начинающийся и кончающийся на стенках волновода. Продольный разрез этого жгута показан на рис. 5.8б. На рис. 5.8в штрих-пунктиром показано распределение линий тока смещения $j_{cm} = \partial D / \partial t$ в плоскости продольного сечения. Это распределение сдвинуто на четверть длины волны в волноводе относительно соответствующего распределения электрического поля (рис. 5.8б). Поперечное электрическое поле оказывается максимальным в некотором сечении $II-II$, сдвинутом на $\lambda_g/4$ относительно сечения $I-I$ (рис. 5.8а). В этом же сечении максимально и поперечное магнитное поле, векторные линии которого идут перпендикулярно векторным линиям электрического поля. Линии магнитного поля идут таким образом, что они охватывают линии тока смещения. Взаимная ориентация поперечных составляющих электрического и магнитного полей соответствует при этом переносу энергии вдоль волновода в сторону положительных z .

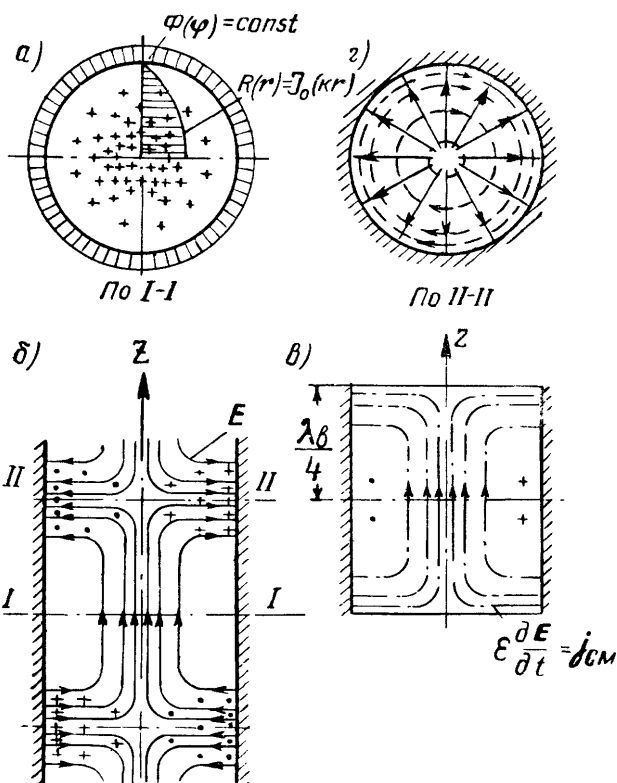


Рис. 5.8. Структура поля волны E_{01} в круглом волноводе

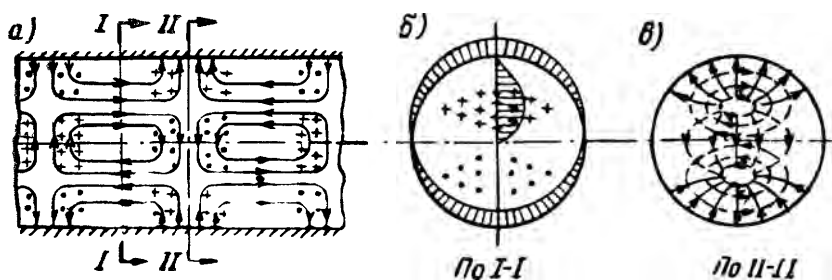


Рис. 5.9. Структура поля волны E_{11} в круглом волноводе

На рис. 5.9 представлена структура поля волны E_{11} . Для этого типа колебаний вдоль окружности волновода укладывается одна стоячая волна поля. Распределение поля по радиусу определяется в этом случае бесселевой функцией первого порядка, причём вдоль радиуса имеет место одна вариация поля до нулевого значения бесселевой функции на стенке. Продольное сечение волновода характеризуется двумя «жгутами» линий электрического поля, идущими в противоположных направлениях один по отношению к другому. Часть линий электрического поля начинается и кончается на стенках, образуя на них поверхностные заряды, часть линий электрического поля оказывается замкнутой. В поперечном сечении $I—I$ линии электрического поля идут вдоль волновода. В сечении $II—II$ электрическое поле поперечно. Линии магнитного поля здесь наиболее интенсивны и идут перпендикулярно электрическим.

Рисунок 5.10 иллюстрирует возможные способы возбуждения волн E_{01} и E_{11} . Поля этих волн возбуждаются штырями с током, расположенными вдоль линий электрического поля. Первая из волн возбуждается продольным штырём, располагаемым в центре поперечного сечения. Волна E_{11} может быть возбуждена двумя продольными штырями, расположенными симметрично относительно центра поперечного сечения и питаемыми в противофазе.

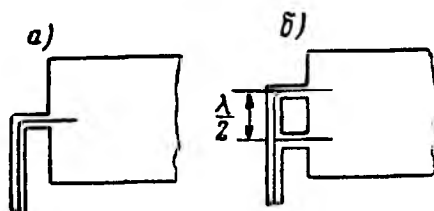


Рис. 5.10. Возбуждение волн E_{01} и E_{11} в круглом волноводе

Волна типа E_{01} часто используется на практике. Достоинством этой волны является её осевая симметрия, благодаря которой она находит применение во вращающихся сочленениях волнозодов.

Рисунок 5.11а иллюстрирует работу простейшего вращающегося сочленения. Волна H_{01} в прямоугольном волноводе 1 возбуждает ток в штыре 2, который в этом случае работает как приёмный штырь. Штырь 2 заходит в отрезок 3 круглого волновода и, действуя как возбуждающий штырь, создаёт в круглом волноводе распространяющуюся волну E_{01} . Энергия из неподвижного отрезка круглого волновода 3 переходит в отрезок круглого волновода 4, вращающегося вместе с антенной. Далее происходит обратное преобразование волны E_{01} в отрезке круглого волновода 4 в волну H_{01} в прямоугольном волноводе 5 при помощи штыря 6.

На рис. 5.11б показана разновидность перехода от волны H_{01} в прямоугольном волноводе к волне E_{01} в круглом, предназначенная для передачи через вращающееся сочленение больших мощностей. Она не содержит штыря, приводящего к местным кон-

центрациям электрического поля. Линии электрического поля волны H_{01} в прямоугольном волноводе, замыкаясь на стенки круглого, непосредственно приводят к образованию структуры поля волны E_{01} . На рис. 5.11б видны согласующие диафрагмы, образующие дополнительную неоднородность, за счёт отражения от кото-

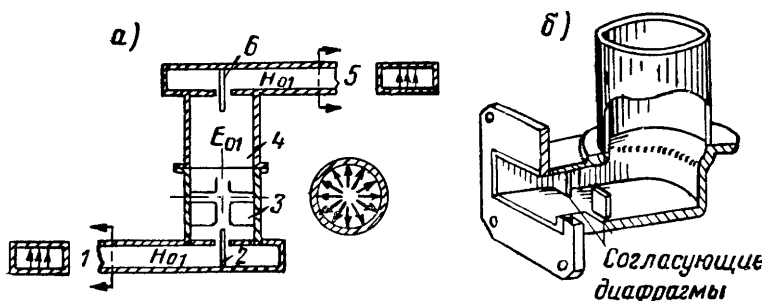


Рис. 5.11. Примеры вращающихся сочленений с использованием волны E_{01} в круглом волноводе

рой компенсируется волна, отражённая в месте перехода из прямоугольного волновода в круглый (о диафрагмах подробнее см. § 9.4).

§ 5.5. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ И КРИТИЧЕСКИЕ ДЛИНЫ ВОЛН ТИПА H В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

В соответствии с решением мембранного уравнения, которому должна удовлетворять продольная составляющая магнитного поля H_z , выражение для этой составляющей имеет вид

$$H_z = H'_z e^{i\omega t - \gamma z} = A J_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (5.24)$$

Выражение (5.24) должно удовлетворять граничному условию

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a,$$

откуда следует, что

$$J'_m(ka) = 0. \quad (5.25)$$

Таким образом, произведение ka должно быть равно корню производной соответствующей бесселевой функции

$$ka = u'_{mn}, \quad (5.26)$$

где u'_{mn} — корень производной бесселевой функции. Как и ранее, индекс m показывает *порядок бесселевой функции*. Индекс же n соответствует теперь *номеру корня производной*.

В зависимости от индексов m и n , соответствующих данной структуре поля, волны типа H в круглом волноводе обозначаются H_{mn} .

Корни производных бesselевых функций могут быть взяты из специальных таблиц корней (табл. 5.3) или из графиков бesselевых функций. Таблица корней производных бesselевых функций приводится ниже.

Таблица 5.3

Корни уравнения $J'_m(u) = 0$ при m						
n	0	1	2	3	4	5
1	3,832	1,841	3,054	4,201	5,317	6,416
2	7,016	5,331	6,706	8,015	9,282	10,520
3	10,173	8,536	9,969	11,846	12,682	13,987
4	13,324	11,706	13,170			

Графики распределения продольной составляющей магнитного поля H_z для волн H_{11} и H_{01} представлены на рис. 5.12 а и б. Они характеризуются наличием m стоячих волн по окружности

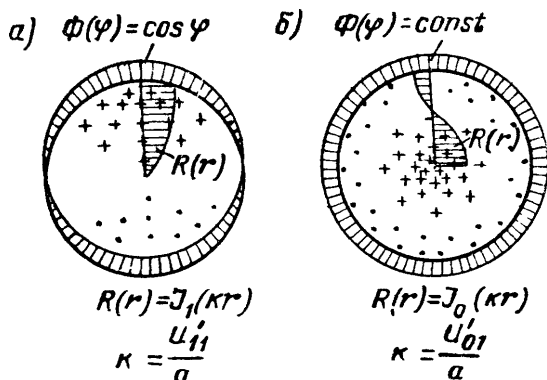


Рис. 5.12. Распределение продольной составляющей магнитного поля H_z для волн H_{11} и H_{01} в круглом волноводе

волновода (в первом случае $m=1$, во втором $m=0$) и распределением поля вдоль радиуса по закону бesselевой функции m -го порядка до n -го корня производной. Корню производной соответствует экстремум функции. Это означает максимум абсолютной величины продольной составляющей магнитного поля у стенки, связанный с протеканием по ней токов. В соответствии со значением индекса $n=1$ для волн H_{11} и H_{01} распределение поля вдоль радиуса характеризуется графиком изменения бesselевой функ-

ции (соответственно первого или нулевого порядка) от её значения при нулевом аргументе до первого экстремального значения.

По значениям корней производных бесселевых функций можно найти собственные числа мембранных уравнений для соответствующих типов волн

$$k'_{mn} = \frac{u'_{mn}}{a}, \quad (5.27)$$

откуда определяются критические длины волн типа H в круглом волноводе

$$\lambda_{kp} = \lambda'_{mn} = \frac{2\pi a}{u'_{mn}}. \quad (5.28)$$

Значения критических длин волн при заданном радиусе a волновода сведены в табл. 5.4. Для удобства сравнения табл. 5.4 содержит данные одновременно как для волн типа H , так и для волн типа E .

Таблица 5.4

Тип колебаний	H_{mn} или E_{mn}	H_{11}	E_{01}	H_{21}	H_{01}	E_{11}	H_{31}	E_{21}
Значение корня бесселевой функции или её производной	u_{mn} или u'_{mn}	1,841	2,405	3,054	3,832	3,832	4,201	5,435
Критическая длина волны	λ_{kp}	$3,412a$	$2,613a$	$2,057a$	$1,640a$	$1,640a$	$1,496a$	$1,224a$

Поперечные компоненты поля волны H в круглом волноводе определяются по известным формулам.

$$\left. \begin{aligned} H_S &= -\frac{\gamma}{k^2} \operatorname{grad}_S H_z \\ E_S &= \rho_H [H_S \mathbf{z}^0] \end{aligned} \right\}. \quad (5.29)$$

Подобно тому, как это было сделано в § 5.3, отсюда можно найти:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= A J_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t - \gamma z} \\ H_r &= -\frac{\gamma}{k} A J'_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t - \gamma z} \\ H_\varphi &= \frac{m\gamma}{k} A \frac{J_m(kr)}{kr} \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t - \gamma z} \\ E_r &= \rho_H H_\varphi \\ E_\varphi &= -\rho_H H_r \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.30)$$

Полагая $\omega > \omega_{кр}$, $\gamma = i\alpha$ исчитая для простоты коэффициент A вещественным, нетрудно перейти к тригонометрической записи. Взяв для этого реальную часть от соотношений (5.30), получим:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= A J_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) \cos(\omega t - \alpha z) \\ H_r &= \frac{\lambda_{кр}}{\lambda_0} A J'_m(kr) \cos m(\varphi - \varphi_0) \sin(\omega t - \alpha z) \\ H_\varphi &= -m \frac{\lambda_{кр}}{\lambda_0} A \frac{J_m(kr)}{kr} \sin m(\varphi - \varphi_0) \sin(\omega t - \alpha z) \\ E_r &= \rho_H H_\varphi \\ E_\varphi &= -\rho_H H_r \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

§ 5.6. СТРУКТУРА ПОЛЯ ВОЛН ТИПА H . ФИЛЬТРАЦИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Изучение полей H в круглом волноводе начнём с волны H_{11} . Этот тип колебаний обладает наименьшей критической частотой, наивысшей критической длиной волны и является для круглого

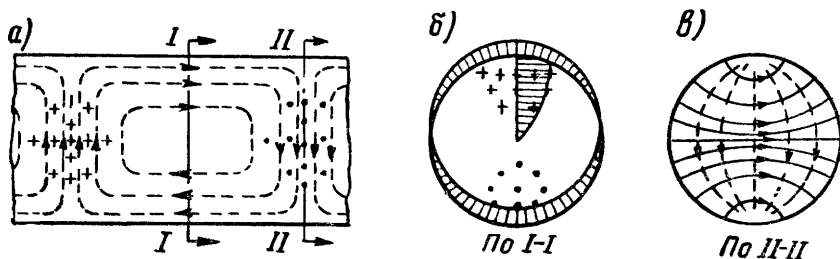


Рис. 5.13. Структура поля волны H_{11} в круглом волноводе

волновода *основным типом колебаний*. Поэтому волну H_{11} легко отделять от волн других типов; она широко применяется на практике. Структура поля волны H_{11} показана на рис. 5.13 а, б, в.

На рис. 5.13б показано распределение продольной составляющей магнитного поля для волны H_{11} . По окружности волновода при колебаниях этого типа укладывается одна стоячая волна поля. Вдоль радиуса распределение следует закону функции Бесселя 1-го порядка $J_1(kr)$, начиная от значения аргумента $kr=0$ до первого нуля её производной, т. е. до максимума функции $J_1(kr)$ у стенки волновода. Магнитные силовые линии представляют собой замкнутые кривые (рис. 5.13а).

Распределение поля в сечении волновода $II-II$, где максимальны поперечные составляющие поля, показано на рис. 5.13в. Как и для других типов колебаний, линии электрического поля

идут перпендикулярно магнитным, причём взаимная ориентация полей соответствует переносу энергии вдоль волновода.

В целом, поле волны H_{11} в круглом волноводе весьма напоминает поле волны H_{01} в прямоугольном волноводе. Поэтому, если сечение прямоугольного волновода постепенно изменяется на

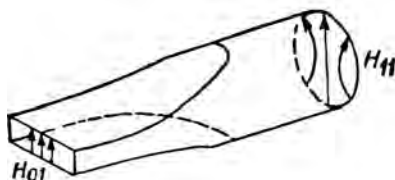


Рис. 5.14. Плавный переход от волны H_{01} в прямоугольном волноводе к волне H_{11} в круглом

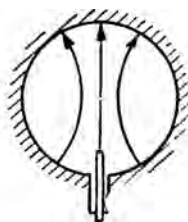


Рис. 5.15. Возбуждение волны H_{11} в круглом волноводе при помощи штыря

круглое (рис. 5.14), волна H_{01} в прямоугольном волноводе переходит в волну H_{11} в круглом. Поскольку обе волны являются волнами основного типа, подбором размеров волноводов можно добиться того, чтобы возникающие на неоднородном участке побочные типы волн не распространялись далее по волноводу. Плавные переходы подобного типа находят практическое применение в аппаратуре свч. То обстоятельство, что оба рассматриваемых поля (H_{11} в круглом волноводе и H_{01} в прямоугольном) являются основными типами полей в соответствующих волноводах, находится в прямой связи с общностью структуры полей этих типов волн. Поле волны H_{11} в круглом волноводе может быть возбуждено поэтому подобно полю волны H_{01} в прямоугольном, например, при помощи штыря, ориентированного вдоль линий электрического поля (рис. 5.15).

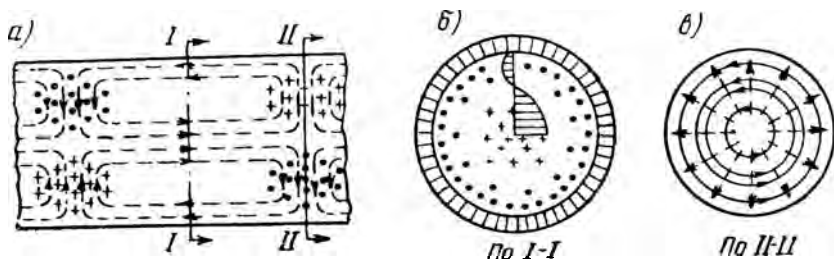


Рис. 5.16. Структура поля волны H_{01} в круглом волноводе

Наряду с основным типом волны H_{11} в круглом волноводе представляют практический интерес волны типа H_{01} (рис. 5.16а, б, в).

На рис. 5.16б показано распределение продольной составляющей магнитного поля для волны H_{01} в поперечном сечении $I—I$, где магнитное поле является продольным. Ход магнитного и электрического полей в продольном сечении волновода иллюстрируется на рис. 5.16а. Распределение электрического и магнитного полей в поперечном сечении $II—II$, где электрические и магнитные линии поперечны, показано на рис. 5.16в. Характерной особенностью волны H_{01} является то, что *все линии электрического поля этой волны замкнуты и представляют собой окружности*. Кольцевое электрическое поле имеет *вихревое* происхождение и вызывается переменным магнитным полем, идущим вдоль оси волновода. Поверхностные токи по стенкам, определяемые по формуле $j_s = [nH_t]$, также являются кольцевыми и не имеют продольной составляющей.

Как будет показано ниже, благодаря такому своеобразному распределению поверхностных токов, затухание волны H_{01} в круглом волноводе уменьшается с повышением частоты (или с уменьшением длины волны). Это свойство волны H_{01} позволяет создать волноводные каналы круглого сечения с малым затуханием.

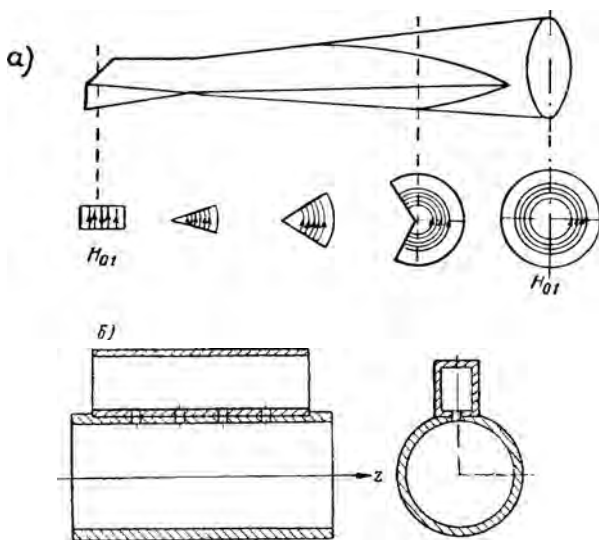


Рис. 5.17. Преобразователи волны типа H_{01} в прямоугольном волноводе в волну типа H_{01} в круглом

Волна H_{01} может быть возбуждена путём преобразования волны H_{01} в прямоугольном волноводе в волну типа H_{01} в круглом волноводе. Такое преобразование может быть осуществлено при постепенном переходе от волновода прямоугольного сечения к секторному волноводу и затем к круглому (рис. 5.17а). На

рис. 5.176 показан возбудитель волны H_{01} в круглом волноводе дифракционного типа. В этом случае круглый волновод соединён с прямоугольным продольной системой отверстий. Путём соответствующего подбора количества отверстий и закона их расположения можно обеспечить полную перекачку энергии из прямоугольного волновода в круглый. При этом электромагнитная энергия в круглом волноводе будет переноситься волной типа H_{01} .

Основная трудность использования волны H_{01} в круглом волноводе связана с тем, что критическая длина волны этого типа волны короче, чем для ряда других типов (см. табл. 5.4). Следовательно, волна типа H_{01} может преобразовываться на неоднородностях в другие типы волн, что приводит к значительному увеличению затухания в волноводе. Однако эта трудность может быть преодолена путём использования фильтров и специальных конструкций волновода

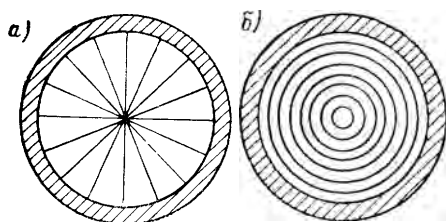


Рис. 5.18. Решётчатые фильтры волн в круглых волноводах:

а) радиальный задерживающий фильтр для волны E_{01} ; б) кольцевой задерживающий фильтр для волны H_{01}



Рис. 5.19. Фильтр поглощающего типа волны H_{01}

Простейшими фильтрами типов волн в волноводе являются отражающие фильтры, представляющие собой решётки из проводов или пластин, которые располагаются параллельно линиям электрического поля в волноводе. Радиальная решётка, или радиальный фильтр, представлена на рис. 5.18а. Такая решётка отражает волну E_{01} , для которой проводники расположены параллельно электрическому полю, так что в них наводятся интенсивные токи. Волна типа H_{01} пропускается этим фильтром без отражения, поскольку проводники перпендикулярны линиям электрического поля, так что токи в них не наводятся. Кольцевой фильтр, т. е. решётка в виде проводящих колец (рис. 5.18б), поддерживаемых каким-либо изолирующим материалом, оказывает обратное действие. Он отражает волну H_{01} и пропускает волну E_{01} . Следует указать, однако, что отражающие фильтры мало эффективны и могут быть использованы в основном в измерительных целях.

Для фильтрации волны H_{01} при передаче энергии в волноводе круглого сечения более эффективно могут быть использованы поглощающие фильтры. Поглощающий фильтр представляет собой диэлектрик с малыми потерями и диэлектрической постоянной, близкой к единице (пенопласт), в котором в радиальных плоскостях расположены поглощающие плёнки (рис. 5.19). Для того чтобы не происходило деление круглого волновода на самостоятельные секторные волноводы, плёнки располагаются только на периферии сечения волновода. Такой фильтр будет эффективно поглощать волны всех типов, имеющие радиальную и продольную составляющие электрического поля, так как в поглощающих плёнках будут наводиться токи. Волна H_{01} распространяется в таком фильтре практически без затухания, так как плёнки расположены перпендикулярно электрическому полю волны этого типа.

Большой интерес представляют *самофильтрующие* волноводы, в которых фильтрация волны H_{01} осуществляется вдоль всего волновода. На рис. 5.20а показан кольцевой *самофильтрующий* волновод, который состоит из набора колец, закреплённых в диэлектрике. Зазор между кольцами практически не влияет на условия распространения волны типа H_{01} , так как этому типу волны соответствуют кольцевые токи в стенках. Для волн других типов зазор будет разрывать линии продольного тока, и, следовательно, волны этих типов будут интенсивно излучаться (при диэлектрике без потерь) или затухать (в диэлектрике с потерями). На рис. 5.20б показаны образцы спиральных *самофильтрующих* волноводов. Эти волноводы наматываются из медной проволоки (круглой или прямоугольной) с малым шагом. Для обеспечения необходимой прочности на спираль наносится диэлектрик. Так как наклон витка спирали мал то такие волноводы по своим фильтрующим свойствам близки к кольцевым. Необходимо отметить также, что как кольцевые так и спиральные волноводы могут быть изготовлены в виде гибких шлангов. Однако при изгибе затухание в них увеличивается.

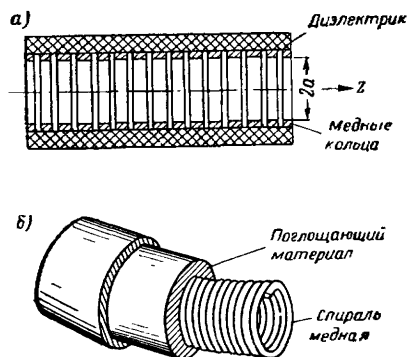


Рис. 5 20. Кольцевой (а); и спиральный (б) волноводы

§ 5.7. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛЯ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ВОЛНЫ H_{11} В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

В круглом волноводе возможны волны H_{11} с различной поляризацией поля. При изменении положения радиального возбуждающего штыря можно получить различную поляризацию волны H_{11} .

Взаимно-перпендикулярные радиальные штыри (рис. 5.21), питаемые от общего генератора, возбуждают две интерферирующие волны H_{11} . Для фиксированного значения координаты r радиальные составляющие электрического поля этих волн описываются соотношениями:

$$\begin{aligned} E_{r1} &= E_{rm1} \cos \varphi \sin (\omega t - \alpha z), \\ E_{r2} &= E_{rm2} \sin \varphi \sin (\omega t - \alpha z + \psi). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Как и в § 4.15, результирующее поле E_z имеет различную поляризацию в зависимости от угла сдвига фаз ψ , а также от соотношения амплитуд E_{rm1} и E_{rm2} , а именно:

1) *линейную*, если $\psi = 0$ или $\psi = \pi$ при произвольном соотношении E_{rm1} и E_{rm2} ;

2) *круговую*, если $\psi = \pm \pi/2$ и $E_{rm1} = E_{rm2}^1$);

3) *эллиптическую* — в общем случае.

Справедливо и обратное положение о том, что произвольно поляризованное поле волны H_{11} можно разложить на два взаимно-перпендикулярных линейно-поляризованных поля H_{11} . При разложении линейно-поляризованного поля на два других линейно-поляризованных можно пользоваться векторной диаграммой (рис. 5.22). Такое разложение на два поля оказывается весьма полезным при оценке влияния некоторых неоднородностей на распространение волн в круглом волноводе.



Рис. 5.21. Возбуждение двух волн типа H_{11} взаимно-перпендикулярными штырями

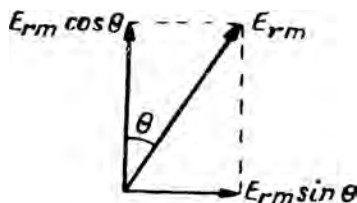


Рис. 5.22. Векторная диаграмма разложения линейно-поляризованного поля H_{11}

Простейшей неоднородностью является сетчатый фильтр (рис. 5.23), расположенный в общем случае под некоторым углом к плоскости поляризации волны. Анализируя действие фильтра, целесообразно разбить результирующую волну в волноводе на две волны, одна из которых линейно-поляризована вдоль направления проводников сетчатого фильтра, а другая — в перпендикулярном к ней направлении. В то время как первая волна отражается фильтром, вторая проходит почти без отражения²⁾. При вращении фильтра и неизменной амплитуде падающей волны амплитуда проходящей волны изменяется примерно по закону синуса.

Более сложной неоднородностью является участок с малой эллиптичностью поперечного сечения. Эта неоднородность может

¹⁾ Для линейной поляризации

$$E_r = E_{r1} + E_{r2} = E_{rm} \cos(\varphi - \Theta) \sin(\omega t - \alpha z),$$

где

$$E_{rm} = \sqrt{E_{rm1}^2 + E_{rm2}^2} \quad \text{и} \quad \Theta = \arctg \left(\pm \frac{E_{rm1}}{E_{rm2}} \right);$$

а для круговой

$$E_r = E_{rm} \sin(\omega t - \alpha z \pm \varphi),$$

где

$$E_{rm} = E_{rm1} = E_{rm2}.$$

²⁾ Чтобы ослабить отражение проходящей волны, можно придать проводникам форму линий магнитного поля. Вторая волна при этом совсем не наводит токов в проводниках.

существенно сказываться на работе волновода. Дело в том, что *сравнительно трудно обеспечить идеально круглую форму сечения волновода*, в особенности на участках, где происходят изгибы. При большой длине волновода эллиптичность проявляется и на неизогнутых его участках. Поэтому весьма важно иметь в виду те последствия, к которым могут привести искажения формы поперечного сечения.

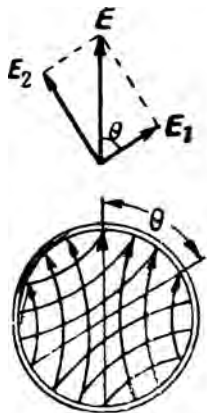


Рис. 5.23. Фильтр волны H_{11} , ориентированный под углом θ к плоскости поляризации

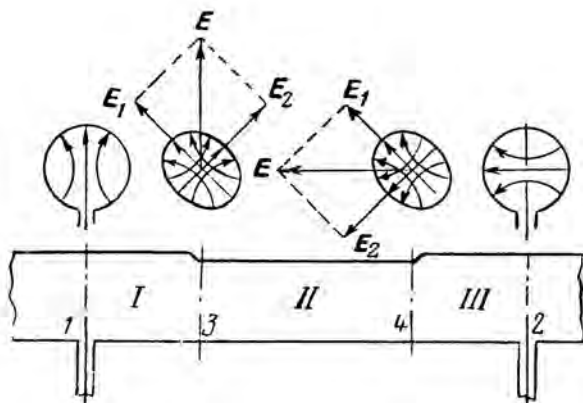


Рис. 5.24. Анализ прохождения волны H_{11} через участок с малой эллиптичностью; векторные диаграммы соответствуют сдвигу фаз $\Delta\psi = \pi$

Для определённости примем, что волновод состоит из трёх участков *I*, *II* и *III* (рис. 5.24). Участок *I* имеет круглое сечение, на этом участке расположен возбуждающий штырь. Участок *II* — эллиптический, но эллиптичность мала и сечение близко по форме к круглому; длина участка равна l . Участок *III* имеет круглое сечение; на этом участке расположен приёмный штырь, ориентированный параллельно возбуждающему штырю. На рис. 5.24 показаны сечения волновода в месте расположения возбуждающего штыря 1, в месте расположения приёмного штыря 2 и в сечениях 3 и 4 на входе и выходе эллиптического участка.

Для анализа особенностей распространения разложим исходное линейно-поляризованное поле волны H_{11} в круглом волноводе на два синфазных поля, линейно-поляризованных вдоль большой и малой осей эллипса. Это разложение иллюстрируется векторной диаграммой, построенной в сечении 3 на входе эллиптического участка.

Поля H_{11} , поляризованные вдоль большой и малой осей эллипса, имеют различные длины волн в волноводе λ_g и различные постоянные распространения α . Не развивая теории эллиптических волноводов, последнее можно объяснить путём простой ана-

логии с прямоугольным волноводом, форма сечения которого близка к квадратной (рис. 5.25). В соответствии с различием в критических длинах волн фазовая постоянная α волны, поляризованной перпендикулярно меньшей стороне $a=b-\Delta a$ прямоугольного волновода, будет несколько меньше, чем фазовая постоянная α_1 волны, поляризованной перпендикулярно его широкой стороне b , т. е.

$$\alpha_1 = \alpha - \Delta \alpha.$$

То же относится и к эллиптическому волноводу, а именно, постоянная распространения волны, поляризованной вдоль большой оси эллипса, будет меньше, чем для волны, поляризованной вдоль его малой оси.

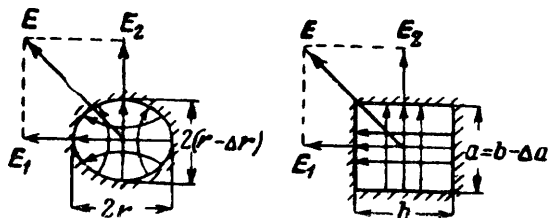


Рис. 5.25. Аналогия волн в эллиптическом и прямоугольном волноводах

Поэтому вдоль эллиптического участка постепенно накапливается сдвиг по фазе и на выходе этого участка он достигает величины

$$\psi = \Delta \alpha l. \quad (5.33)$$

Одновременно меняется характер поляризации результирующего поля. На участке же III с круговым сечением, где разность фаз больше не меняется, характер поляризации остаётся таким же, каким он был на выходе неоднородного участка.

В общем случае поляризация на выходе неоднородного участка является *эллиптической*. В частных случаях, когда

$$\psi = (2\nu + 1) \frac{\pi}{2}$$

или когда

$$\psi = \nu\pi$$

(ν — целое число), поляризация переходит соответственно в *круговую* и *линейную*.

В линиях передачи (рис. 5.24) наиболее нежелателен случай, когда сдвиг фаз равен целому, но нечётному числу π . Линейная поляризация переходит при этом в линейную же, но с поворотом плоскости поляризации на угол 2θ . При $\theta = 45^\circ$ поворот плоскости поляризации составляет 90° .

Последнее иллюстрируется векторными диаграммами (рис. 5.24), построенными в сечениях 1 и 4 на выходе эллиптического участка. На рисунке представлен случай, когда фаза вектора E_1 в сечении 4 совпадает с фазой этого вектора в сечении 1, что справедливо, вообще говоря, для различных моментов времени. При фазовом сдвиге $\psi = \Delta\alpha l = \pi$ фаза вектора E_2 изменяется на 180° по сравнению с его фазой в сечении входа. Результирующий вектор E поворачивается в пространстве на 90° . Поэтому в приёмном штыре 2, поставленном без учёта возможных поляризационных эффектов, *эдс наводиться не будет*.

Из сказанного следует, что поле волны H_{11} неустойчиво по отношению к изменениям формы сечения волновода. Это несколько затрудняет применение волны основного типа в круглом волноводе, если она используется на протяжении всего волноводного тракта. Поэтому, *часто ограничиваются применением круглых волноводов лишь на участке вращающегося сочленения*. Если же волна H_{11} используется на протяжении всего волноводного тракта, необходимо *учитывать влияние неоднородностей* на характер поляризации поля. Это один важный вывод, который можно сделать при анализе явлений поляризации.

Другой важный вывод состоит в том, что отрезки круглого волновода с изменённой формой сечения можно применять как *искусственные поляризаторы*, позволяющие поворачивать плоскость поляризации линейно-поляризованных колебаний и получать из линейной поляризации круговую и обратно. Последнее может быть использовано для поляризованного излучения и приёма, а также при передаче энергии через вращающееся сочленение. Следует иметь также в виду, что *при круговой поляризации по волноводу можно передать в два раза большую мощность, чем при линейной* (см. § 4.15).

В качестве поляризаторов используют участки круглого волновода со специальными металлическими или диэлектрическими вставками (рис. 5.26). Для преобразования линейной поляризации в круговую плоскости поляризации падающей волны следует ориентировать под углом около 45° к плоскости вставки так, чтобы амплитуды волн на выходе неоднородного участка, поляризованной вдоль вставки и поляризованной перпендикулярно к ней, были одинаковы. Нужный сдвиг фаз ψ обеспечивается за счёт выбора длины вставки

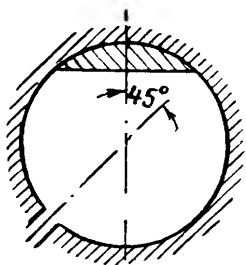


Рис. 5.26. Участок круглого волновода со вставкой для получения круговой поляризации

$$l = \frac{\pi}{2\Delta\alpha} (1 + 2\nu) \quad (\nu = 0, 1, \dots).$$

Последнее время интерес к поляризационным явлениям ещё более усилился в связи с новыми возможностями, которые открываются при применении специальных магнитодиэлектрических материалов — ферритов (см. §§ 11.4 и 11.5).

§ 5.8. ПЕРЕДАВАЕМАЯ МОЩНОСТЬ И ПОТЕРИ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ. ВЫБОР РАЗМЕРОВ ВОЛНОВОДА

Передаваемая мощность

Передаваемая мощность может быть рассчитана по общей формуле

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_S [\mathbf{E} \mathbf{H}]_z dS.$$

В режиме бегущей волны, когда поперечные составляющие будут синфазны, для распространяющегося типа волн можно написать

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a (E_{rm} H_{\varphi m} - E_{\varphi m} H_{rm}) r dr d\varphi. \quad (5.34)$$

В написанное выражение входят амплитуды поперечных составляющих поля в полярной системе координат, множитель $1/2$, учитывающий усреднение во времени, и элемент площади в полярной системе координат $dS = r dr d\varphi$. Амплитуды поперечных составляющих берутся здесь как функции обеих координат поперечного сечения (что несколько отличается от обозначений предыдущего параграфа, где они брались для фиксированного r).

Расчёт передаваемой мощности несколько упрощается, если обратиться к ф-лам (4.87), в которых поперечные составляющие заменены через продольные. Тогда получим:

для волны типа H

$$P = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda \lambda_g} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a H_{zm}^2 r dr d\varphi, \quad (5.35)$$

для волны типа E

$$P = \frac{1}{2\rho_0} \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda \lambda_g} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a E_{zm}^2 r dr d\varphi, \quad (5.36)$$

где продольные составляющие поля H_{zm} и E_{zm} определяются соотношениями (5.31) и (5.23).

При вычислении интегралов можно пользоваться вытекающим из ур-ния (5.6) соотношением

$$\int_0^a J_m^2(kr) r dr = \frac{a^2}{2} J_m'^2(ka) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) J_m^2(ka). \quad (5.37)$$

Кроме того, следует иметь в виду достаточно очевидное равенство

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m(\varphi - \varphi_0) d\varphi = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } m = 0, \\ \pi(1 + \delta_m), & \text{если } m \geq 1, \end{cases} \quad (5.38)$$

где $\delta_m = 1$ при $m = 0$ и $\delta_m = 0$ при $m \geq 1$.

Преобразуя выражения (5.35) и (5.36) с учётом граничных условий (5.25) и (5.16), получим:
для волн типа H

$$P = \frac{\pi}{4} (1 + \delta_m) A^2 \rho_0 \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda \lambda_g} \left(a^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) J_m^2(ka), \quad (5.39)$$

где коэффициент A определяется соотношением (5.31);
для волн типа E

$$P = \frac{\pi}{4} (1 + \delta_m) \frac{B^2}{\rho_0} \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda \lambda_g} a^2 J_m'^2(ka), \quad (5.40)$$

где коэффициент B определяется соотношениями (5.23). При этом поскольку

$$J_m'(u) = -\frac{m}{u} J_m(u) + J_{m-1}(u) = \frac{m}{u} J_m(u) - J_{m+1}(u)^1, \quad (5.41)$$

а $J_m(ka) = 0$, при расчётах с этими волнами можно полагать

$$J_m'^2(ka) = J_{m-1}^2(ka) = J_{m+1}^2(ka). \quad (5.42)$$

Предельная и допустимая рабочие мощности в круглом волноводе могут быть охарактеризованы для каждого типа волны величиной отношения средней мощности, передаваемой через единицу поперечного сечения волновода, к квадрату максимальной амплитуды электрического поля. Значения этого отношения для различных типов волн сведены в табл. 5.5.

¹⁾ См., например, В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, ГТТИ, 1949, стр. 522 или Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций, ГТТИ, 1948, стр. 236.

Вид колебаний	H_{11}	E_{01}	H_{01}
Отношение	$\frac{1}{1590} \times$	$\frac{1}{2800} \left(\frac{\lambda_{kp}}{\lambda} \right)^2 \times$	$\frac{1}{1570} \times$
$\frac{P}{SE_{m0}^2}$	$\times \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2}$	$\times \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2}$	$\times \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_p} \right)^2}$

Потери в круглом волноводе

Используя приведённые выше соотношения, легко перейти далее к расчёту коэффициента затухания β , учитывающего потери энергии в проводящих стенках волновода. Коэффициент β рассчитывается по общей ф-ле (4.91)

$$\beta = \frac{R_S}{2\rho} \frac{\oint H_{\tau m}^2 dl}{\int_S H_{Sm}^2 dS}.$$

Написанное выражение может быть преобразовано к виду

$$\beta = \frac{R_S}{4P} \int H_{\tau m}^2 dl,$$

где $P = \frac{1}{2} \rho \int H_{Sm}^2 dS$ — мощность, переносимая через поперечное сечение. При этом предполагается, согласно § 4.10, что распределение поля соответствует идеальному волноводу.

Для волн типа E закон распределения амплитуды тангенциальной составляющей магнитного поля определяется из соотношений (5.23)

$$H_{\tau m} = H_{\varphi m} = \frac{1}{\rho_E} \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_g} B J'_m(ka) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

где

$$\rho_E = \rho_0 \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

откуда

$$\oint H_{\tau m}^2 dl = a \int_{\varphi=0}^{2\pi} H_{\varphi m}^2 d\varphi = \frac{\pi a}{\rho_0^2} (1 + \delta_m) \frac{\lambda_{kp}^2}{\lambda^2} B^2 J_m'^2(ka).$$

Используя соотношение (5.40), выражение для коэффициента затухания волн типа E в неперах на единицу длины окончательно находим в виде

$$\beta = \frac{R_S}{a \rho_0} \frac{\lambda_g}{\lambda}. \quad (5.43)$$

Подобным же образом для волн типа H , когда

$$H_{\tau m}^2 = H_{\varphi m}^2 + H_{zm}^2,$$

можно найти

$$\beta = \frac{R_S}{a \rho_0} \frac{\lambda_g}{\lambda} \left[\frac{m^2}{u_{mn}'^2 - m^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right]. \quad (5.44)$$

Здесь u_{mn}' — корень производной функции Бесселя, соответствующий данной волне.

На рис. 5.27 представлены кривые изменения коэффициента затухания в зависимости от частоты для различных типов волн в круглом волноводе заданного диаметра. В окрестности, соответствующей критической частоте, имеет место резкое возрастание затухания. Для волн E_{01} и H_{11} коэффициент затухания имеет минимум при некоторой частоте и увеличивается в связи с увеличением поверхностного сопротивления пропорционально $\sqrt{f}$.

Несколько иначе, чем во всех ранее рассмотренных случаях, идёт кривая затухания для волны H_{01} в круглом волноводе. Здесь имеет место *непрерывное падение затухания с ростом частоты*.

Последнее связано с тем, что единственной составляющей магнитного поля волны H_{01} , тангенциальной к поверхности проводника, является продольная составляющая H_z . С увеличением же частоты продольная составляющая уменьшается по сравнению с поперечной (рис. 5.28). В этом можно убедиться, сопоставляя густоту линий магнитного поля в продольном и поперечном направлениях. Поскольку переносимая мощность определяется попереч-

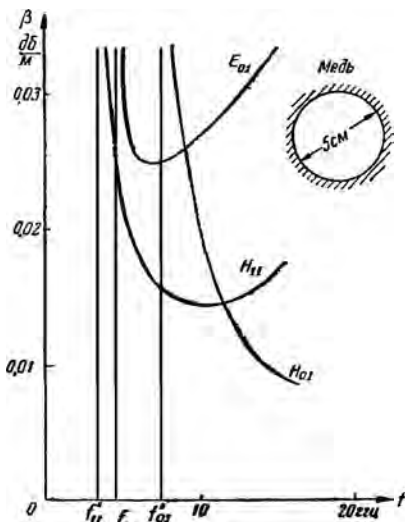


Рис. 5.27. Кривые $\beta = \beta(f)$ для различных видов колебаний в круглом волноводе ($2r = 5$ см, материал стенок — медь)

ными составляющими, а потери — продольной, то при неизменной величине переносимой мощности потери уменьшаются с ростом частоты примерно как произведение $R_s H_{zm}^2$ (примерно как $\omega^{1/2} \omega^{-2} = \omega^{-3/2}$). В такой же мере уменьшается и постоянная затухания β .

Описанное выше явление уменьшения потерь с частотой свойственно для всех волн типа H с индексом $m=0$, что следует также непосредственно из соотношения (5.44). При $m \neq 0$ эффект

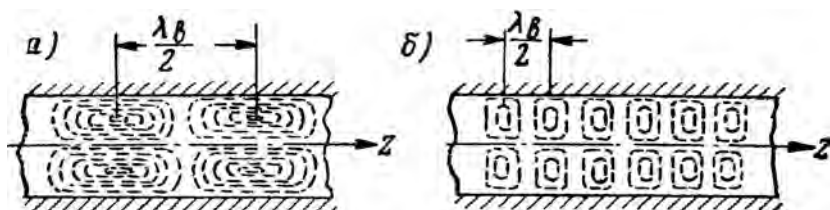


Рис. 5.28. Изменение структуры поля волны H_{01} с ростом частоты

уменьшения потерь не сказывается потому, что имеются потери, связанные с существованием поперечной составляющей магнитного поля у стенок (т. е. потери за счёт продольных токов), а эти потери не уменьшаются с ростом частоты.

Выбор размеров круглого волновода

Наибольшее практическое значение в круглом волноводе имеют волны H_{11} , E_{01} и H_{01} .

При работе на волне H_{11} размеры волновода обычно выбираются, исходя из условий пропускания основной волны и непропускания волны E_{01} (рис. 5.29):

$$\frac{2\pi a}{u_{01}} < \lambda < \frac{2\pi a}{u'_{11}}$$

или

$$2,61a < \lambda < 3,41a.$$

Поэтому размер a должен удовлетворять условию

$$\frac{\lambda}{3,41} < a < \frac{\lambda}{2,61}. \quad (5.45)$$

Это значит, что радиус a волновода должен быть около одной трети средней рабочей длины волны; внутренний диаметр волновода должен составлять примерно около двух третей этой длины волны. В качестве примера приведём данные для двух описанных в литературе круглых волноводов, работающих на волне типа H_{11} (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Внутренний диаметр мм	Расчётная длина волны см	Предельная мощность Мвт	Затухание дб/м	Рабочий диапазон длин волн см
76,2	10	16,6	0,014	10,0—11,7
25,2	3,2	1,57	0,085	3,18—3,64

В случае использования волны E_{01}

$$a > \frac{\lambda}{2,61}. \quad (5.46)$$

В качестве второго условия, в соответствии с диаграммой типов волн (рис. 5.29), можно выбрать условие непроникновения волны H_{21}

$$a < \frac{\lambda}{2,06}. \quad (5.47)$$

Это значит, что радиус a волновода должен быть порядка $3/7$, а внутренний диаметр порядка $6/7$ средней рабочей длины волны.

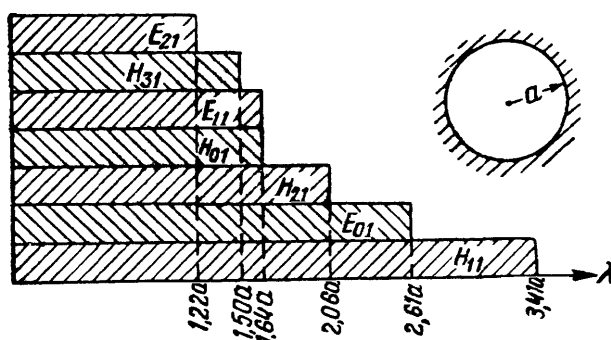


Рис. 5.29. Диаграмма типов волн для круглого волновода

Характерно, что круглые волноводы обладают более узким, чем прямоугольные волноводы, диапазоном длин волн, в пределах которого может распространяться один вид колебаний.

С целью резкого уменьшения затухания возможно значительное увеличение диаметра волновода, при котором по волноводу может распространяться ряд типов колебаний. Это представляет интерес, например, с точки зрения многоканальной передачи сигналов связи на большие расстояния. Особые преимущества имеет при этом волна H_{01} .

Эксперименты, описанные в литературе, показывают, что прямолинейный волновод диаметром 50 мм обеспечивает в диапазоне волн 8 мм затухание около 2,5 дб/км при теоретическом значении 1,7 дб/км.

При этом в волноводе могут распространяться более 100 типов волн. Поэтому такие результаты получены только на лабораторных волноводных линиях, выполненных с большой точностью. Применение самофильтрующих волноводов (рис. 5.20) позволяет значительно снизить требования к точности изготовления волноводов и, таким образом, открывает широкие возможности для создания широкополосных волноводных каналов с малыми потерями. Опубликованные теоретические и экспериментальные работы показывают, что на волне типа H_{01} в диапазоне миллиметровых волн могут быть созданы волноводные линии, обеспечивающие передачу сигналов в полосе частот, превышающей 40 000 Мгц.

§ 5.9. ПОЛЯ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ ЧАСТОТЕ НИЖЕ КРИТИЧЕСКОЙ

Поля отдельных видов волн в круглом волноводе при частоте ниже критической представляют интерес не только с точки зрения изучения структуры электромагнитного поля в окрестности возбуждающего устройства, но находят непосредственное применение в так называемых предельных аттенуаторах (ослабителях), используемых в измерительной технике. Предельный аттенуатор выполняется как отрезок круглого волновода, размеры которого не допускают распространения возбуждаемых волн. Обычно аттенуатор рассчитывается для работы на волне с низшей критической частотой, которая имеет минимальное затухание. Как видно из формулы

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega_{кр}}{v}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}, \quad (5.48)$$

затухание тем меньше, чем ниже критическая частота или чем больше критическая длина волны. При этом, в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, затухание не связано с потерями энергии. Чтобы устранить зависимость затухания от частоты, берут $\lambda_{кр} \ll \lambda$, при этом постоянная затухания

$$\beta \approx \frac{\omega_{кр}}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} \quad (5.49)$$

практически не зависит от частоты ω .

На рис. 5.30а и б показаны структуры полей E_{01} и H_{11} при частоте ниже критической, а на рис. 5.31а и б — соответствующие конструкции предельных аттенуаторов. Передача активной мощности по аттенуатору имеет место только в том случае, если он нагружен на конце. При отсутствии нагрузки на создание поля расходуется реактивная мощность, так как волновое сопротивление выражается мнимым числом. При наличии нагрузки, когда поле характеризуется наложением двух решений вида $e^{i\omega t \pm \beta z}$, сдвиг фаз между поперечными составляющими поля будет несколько отличаться от 90° . Последнее означает, что при этом в волновод наряду с реактивной поступает и некоторая активная мощность.

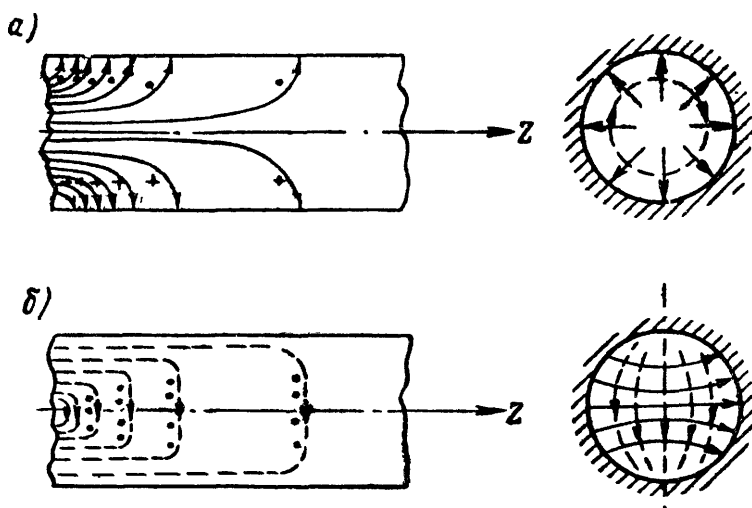


Рис. 5.30. Структура поля волн E_{01} (а) и H_{11} (б) при частоте ниже критической

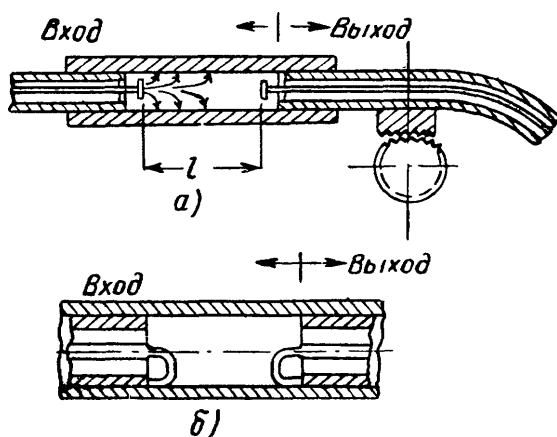


Рис. 5.31. Конструкции предельных аттенуаторов с использованием волн E_{01} (а) и H_{11} (б) в круглом волноводе

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ

§ 6.1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Рассматривая коаксиальный кабель (рис. 6.1) как волновод, т. е. как систему, направляющую распространение электромагнитной энергии, легко сделать вывод о том, что в коаксиальном кабеле возможно существование волн типов *ТЕМ*, *Н* и *Е*. Как известно из общей теории волноводов (гл. 3), критические частоты для волн *ТЕМ* всегда равны нулю.

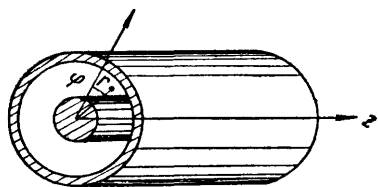


Рис. 6.1. Коаксиальный кабель

Последнее справедливо, в частности, и для коаксиального кабеля. Это значит, что по коаксиальному кабелю могут распространяться в виде волн колебания *ТЕМ* любых частот и передача энергии имеет место даже для постоянного тока. Наоборот, критические частоты

для волн *Н* и *Е* всегда больше нуля. Поэтому эти волны могут распространяться по коаксиальному кабелю только на достаточно высоких частотах. Волна *ТЕМ*, которая обладает в коаксиальном кабеле наименьшей критической частотой $\omega_{кр}=0$, называется волной основного типа, а все виды волн *Н* и *Е* — волнами высших типов.

Изучение волн в коаксиальном кабеле преследует следующие цели. Во-первых, изучая волну основного типа в коаксиальном кабеле, можно распространить некоторые соотношения, уже известные из теории длинных линий, на случай, когда поперечные размеры кабеля соизмеримы с длиной волны. Для этого соответствующие соотношения будут выведены более общим путём, базирываясь на результатах гл. 3, т. е. из уравнений электромагнитного поля. Во-вторых, можно найти рабочий диапазон частот коаксиального кабеля как направляющей системы, т. е. диапазон частот, в пределах которого коаксиальный кабель работает только

на одном типе колебаний. Для этого, наряду с волной основного типа TEM , нужно познакомиться с волнами высших типов H и E . Исходя из требований обеспечения необходимого рабочего диапазона, максимальной передаваемой мощности и минимальных потерь, можно перейти, наконец, к выбору геометрических размеров кабеля и к изучению примеров конструкций.

При анализе электромагнитных волн в коаксиальном кабеле будем пользоваться цилиндрической системой координат r, φ, z (рис. 6.2). Вначале рассмотрим волну основного типа TEM , а затем волны высших типов.

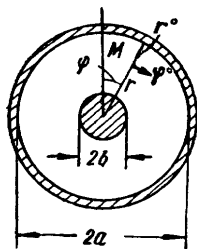


Рис. 6.2. Сечение коаксиального кабеля и полярные координаты r, φ, z

§ 6.2. ВОЛНА TEM В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ

Для волны основного типа TEM в коаксиальном кабеле продольные составляющие электрического и магнитного полей отсутствуют ($E_z = 0$ и $H_z = 0$). Имеются лишь поперечные составляющие этих полей E_s и H_s , которые в соответствии с изложенной в гл. 3 общей теорией имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_s &= E'_s(r, \varphi) e^{i\omega t - \gamma z} \\ H_s &= H'_s(r, \varphi) e^{i\omega t - \gamma z} \end{aligned} \right\}, \quad (6.1)$$

где

$$\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu. \quad (6.2)$$

Как было показано в гл. 3, из равенства нулю продольных и неравенства нулю поперечных компонентов поля следует, что $k^2 = 0$. Поэтому для волны TEM

$$\gamma^2 = -\omega^2 \epsilon \mu \quad (6.3)$$

и постоянная распространения γ выражается чисто мнимым числом

$$\gamma = \pm i\alpha = \pm i\omega \sqrt{\epsilon \mu} = \pm i \frac{\omega}{v}.$$

Здесь $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ — фазовая скорость волны TEM^1), совпадающая со скоростью света в диэлектрической среде, заполняющей кабель.

¹⁾ Поскольку фазовая скорость не зависит от частоты, дисперсия отсутствует, а групповая скорость совпадает с фазовой. Поэтому скорость v можно называть просто скоростью распространения.

Выражения (6.1) можно при этом записать так:

$$\left. \begin{aligned} E_S &= E'_S(r, \varphi) e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v}\right)} \\ H_S &= H'_S(r, \varphi) e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Величины $E'_S(r, \varphi)$ и $H'_S(r, \varphi)$ в общем случае находятся из мембранных уравнений для поперечных составляющих поля, которые при $k=0$ вырождаются в уравнения Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_S^2 E'_S(r, \varphi) &= 0 \\ \nabla_S^2 H'_S(r, \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Изложенные в § 3.6 соображения позволяют не заниматься решением уравнений Лапласа (6.5), а воспользоваться тем, что *распределение поля волны ТЕМ в поперечной плоскости совпадает с известными распределениями соответствующих статических полей*. Для коаксиального кабеля электростатическое поле является радиальным и изменяется обратно пропорционально радиусу, поэтому можно написать, что

$$E'_S = r^0 \frac{A}{r}, \quad (6.6)$$

где A — постоянный коэффициент.

Выражение для вектора E напряжённости электрического поля принимает вид

$$E = E_S = r^0 \frac{A}{r} e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v}\right)} = r^0 \frac{A}{r} e^{i(\omega t - \alpha z)}. \quad (6.7)$$

Выражение для вектора H напряжённости магнитного поля можно получить, используя известную связь между поперечными составляющими поля волны ТЕМ

$$H = H_S = \frac{1}{\rho_0} [z^0 E_S].$$

Замечая, что $[z^0 r^0] = \varphi^0$, найдём

$$H = \varphi^0 \frac{1}{\rho_0} \frac{A}{r} e^{i(\omega t - \alpha z)}. \quad (6.8)$$

Как и в соответствующем статическом случае, магнитное поле является азимутальным.

Переходя в полученных выражениях к тригонометрической записи, полагаем для простоты коэффициент A чисто вещественным. Взяв от соотношения (6.7) и (6.8) реальную часть, получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{r}^0 \frac{A}{r} \cos(\omega t - \alpha z) \\ \mathbf{H} &= \varphi^0 \frac{1}{r_0} \frac{A}{r} \cos(\omega t - \alpha z) \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Структура электромагнитного поля волны TEM , характеризующаяся найденными соотношениями, показана на рис. 6.3. Линии электрического поля (сплошные линии) идут радиально. На стен-

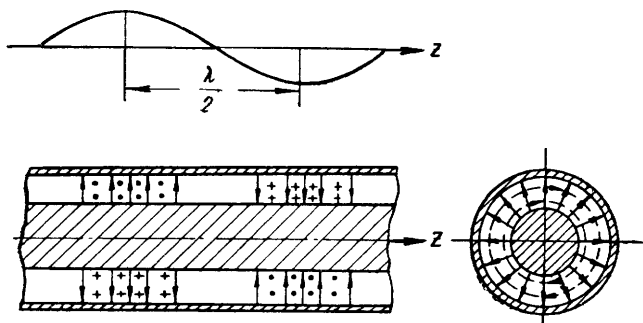


Рис. 6.3. Структура электромагнитного поля волны TEM

ках кабеля при этом наводятся заряды, а между ними создаётся определённое напряжение u . Линии магнитного поля (штриховые) имеют кольцевой характер и охватывают ток i внутреннего проводника.

Напряжение u определяется как линейный интеграл от вектора напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ между проводящими цилиндрами

$$u = \int_{r=b}^a \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = A \ln \frac{a}{b} \cos(\omega t - \alpha z) = U_m \cos(\omega t - \alpha z), \quad (6.10)$$

где U_m — амплитуда напряжения:

$$U_m = A \ln \frac{a}{b}. \quad (6.11)$$

Ток i находим по закону полного тока, как интеграл от вектора $\mathbf{H}$ по замкнутому контуру, окружающему внутренний проводник кабеля,

$$i = \oint \mathbf{H} \, d\mathbf{r}. \quad (6.12)$$

Выбрав в качестве контура интегрирования окружность радиуса r , интеграл (6.12) можно найти как произведение постоянного для данного r значения H на длину окружности

$$i = \oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = H 2 \pi r. \quad (6.13)$$

Подставляя в это выражение H из соотношений (6.9), получим

$$i = \frac{2 \pi A}{\rho_0} \cos(\omega t - \alpha z) = I_m \cos(\omega t - \alpha z), \quad (6.14)$$

где I_m — амплитуда тока:

$$I_m = \frac{2 \pi A}{\rho_0}. \quad (6.15)$$

Отношение напряжения u к току i в режиме бегущей волны называется *волновым сопротивлением кабеля* или, в отличие от волнового сопротивления по полю, — *волновым сопротивлением по напряжению и току*

$$\rho_k = \rho_{ui} = \frac{u}{i} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{2 \pi} \rho_0 \ln \frac{a}{b}. \quad (6.16)$$

Если как обычно, $\mu_r = 1$, то

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{120 \pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ Ом}$$

и

$$\rho_k = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{b} \text{ Ом}. \quad (6.17)$$

Мы получили, таким образом, известную формулу для волнового сопротивления коаксиального кабеля несколько иначе, чем в теории длинных линий, исходя из уравнений электромагнитного поля, а не из уравнений Кирхгофа. При этом выявлена связь между волновым сопротивлением кабеля $\rho_k = \rho_{u,i}$ по напряжению и току и волновым сопротивлением по полю ρ_0 . О существовании подобной связи уже говорилось в § 2.4 применительно к волне *ТЕМ* между параллельными плоскостями. При переходе от натуральных логарифмов к десятичным ф-ла (6.17) приобретает вид

$$\rho_k = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \lg \frac{a}{b}. \quad (6.18)$$

Найденные выражения характеризуют напряжение, ток и сопротивление для режима бегущей волны типа *ТЕМ*. Подобные же

выражения для смешанного режима получаются при учёте интерференции падающей и отражённой волн. Поскольку они известны из теории длинных линий, на них более подробно останавливаться не будем.

Характерно, что *выражения для волны TEM в коаксиальном кабеле получены без использования какого-либо ограничивающего предположения о том, что поперечные размеры много меньше длины волны*, хотя последнее всегда оговаривается в теории длинных линий.

Дело в том, что в теории длинных линий, кроме волны TEM, другие типы волн не рассматриваются. Между тем, *когда размеры кабеля становятся соизмеримы с длиной волны, оказывается возможным распространение этих типов волн*, что исключает возможность применения теории длинных линий к интерференционному полю.

Формулы (6.17) и (6.18) характеризуют результирующее поле лишь в том случае, если можно не принимать во внимание полей высших типов волн.

§ 6.3. ВОЛНЫ E В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ

Согласно определению, решения уравнений электромагнитного поля, соответствующие волнам E, характеризуются наличием продольной составляющей электрического поля

$$E_z = E'_z(r, \varphi) e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (6.19)$$

Величина $E'_z(r, \varphi)$ определяется из мембранного уравнения

$$\nabla_s^2 E'_z + k^2 E'_z = 0. \quad (6.20)$$

Частное решение этого уравнения в полярной системе координат имеет вид

$$E'_z = [A J_m(kr) + B Y_m(kr)] \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad (6.21)$$

где m — целое число периодов поля, укладываемых вдоль окружности волновода, $A \neq 0$ и $B \neq 0$ — некоторые постоянные.

Присутствие в решении (6.21) бесселевой функции второго рода $Y_m(kr)$ не противоречит требованию конечности поля, поскольку точка $r=0$ не относится к области, заполненной диэлектриком, для которой строится решение. Однако благодаря тому, что решение содержит по сравнению с решением для круглого волновода дополнительную постоянную, можно удовлетворить граничным условиям как на поверхности внешнего, так и на поверхности внутреннего проводящих цилиндров, т. е. условиям

$$E'_z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{при } r = a \\ \text{при } r = b. \end{array} \right. \quad (6.22)$$

Граничные условия (6.22) приводят к системе уравнений:

$$A J_m(ka) + B Y_m(ka) = 0, \quad (6.23)$$

$$A J_m(kb) + B Y_m(kb) = 0. \quad (6.24)$$

Исключая постоянные A и B из уравнений (6.23) и (6.24) (для этого достаточно, например, найти величины отношений $\frac{B}{A}$ из уравнений (6.23) и (6.24) порознь, а затем приравнять их между собой), приходим к трансцендентному уравнению

$$\frac{J_m(ka)}{Y_m(ka)} = \frac{J_m(kb)}{Y_m(kb)}. \quad (6.25)$$

При любом заданном значении индекса m трансцендентное уравнение (6.25) удовлетворяется для бесконечной последовательности собственных чисел $k_{m1}, k_{m2}, \dots, k_{mn}$.

Каждому значению собственного числа k_{mn} соответствует своё решение, т. е. определённый вид колебаний E_{mn} , характеризующий критической длиной волны

$$\lambda_{kp} = \frac{2\pi}{k_{mn}}. \quad (6.26)$$

Решения уравнения (6.25) табулированы и имеются в ряде источников¹⁾.

На основе этих решений построен график критических длин волн (рис. 6.4а) для различных видов колебаний E_{mn} . По оси абсцисс отложено отношение b/a внутреннего радиуса кабеля к внешнему, а по оси ординат — отношение $\frac{\lambda_{mn}}{a-b}$ критической длины волны для соответствующего типа колебаний к расстоянию между проводниками коаксиального кабеля $d=a-b$. Изменение величины отношения b/a от 0 до 1 соответствует значительному изменению конфигурации поперечного сечения, связанному с переходом от уже известного случая круглого волновода к другому известному случаю системы двух параллельных плоскостей (рис. 6.4б)²⁾. Структура поля волны E в коаксиальном кабеле является при этом промежуточной между структурами уже известных полей в круглом волноводе и между параллельными плос-

¹⁾ См., например, Г. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций. ГТТЛ, 1948, стр. 323—325; Справочник по волноводам, перевод под ред. Я. Н. Фельда, «Советское радио», 1952, стр. 81.

²⁾ В первом случае $b=0$: во втором случае, когда отношение $b/a \rightarrow 1$, отношение $\frac{a}{a-b} = a/d \rightarrow \infty$, так что при постоянной разности радиусов $a-b=d$ оба радиуса безгранично возрастают.

костями. Соответственно этому критические длины волн λ_{mn} изменяются от значений, найденных ранее для круглого волновода, до значений, соответствующих системе параллельных плоскостей. В представляющих практический интерес случаях, когда номера корней трансцендентного уравнения малы ($n=1$ или 2), значения критических длин волн на участке графика $b/a > 1/4$ изменяются сравнительно мало. Для приближённой оценки критических длин волн в этих случаях можно пользоваться соответствующим расчётным соотношением для системы параллельных плоскостей

$$\lambda_{кр} = \frac{2(a-b)}{n}. \quad (6.27)$$

На рис. 6.5а, б, в изображена структура поля волны E_{01} , которая соответствует значениям индексов $m=0$ и $n=1$ и обладает наименьшей критической частотой из всех волн типа E в коаксиальном кабеле. На рис. 6.5б, в частности, показано распределение продольной составляющей электрического поля E_z в плоскости поперечного сечения. Нанесены функции азимутального и радиального распределения поля $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$. Распределение поля вдоль окружности кабеля равномерное ($m=0$), характер распределения вдоль радиуса соответствует одной полуволне поля. Линии электрического поля образуют жгут, идущий вдоль кабеля (рис. 6.5а, б). Они начинаются и заканчиваются на стенках кабе-

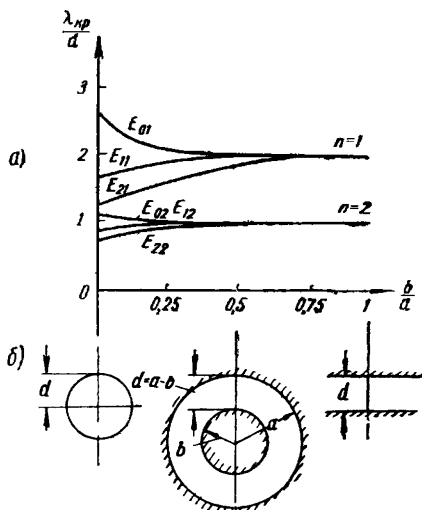


Рис. 6.4. График критических длин волн для волн типа E в коаксиальном кабеле

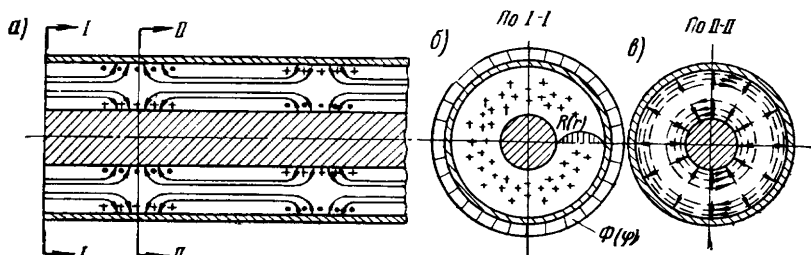


Рис. 6.5. Структура поля волны E_{01} в коаксиальном кабеле

ля, наводя в каждом поперечном сечении одноимённые заряды на обоих проводниках. Рисунок 6.5б представляет собой разрез по се-

чению $I—I$, показанному на рис. 6.5а. Разрез по сечению $II—II$ дан на рис. 6.5в. На этом разрезе показаны также линии магнитного поля, представляющие собой концентрические окружности.

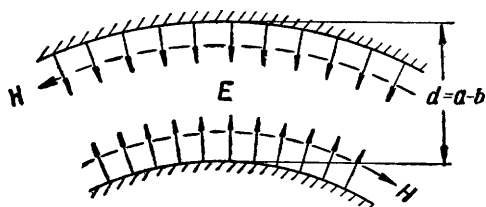


Рис. 6.6. Переход от поля E_{01} в коаксиальном кабеле к полю E_1 между параллельными плоскостями

По мере увеличения радиусов a и b при неизменном расстоянии между проводниками $d=a-b$ (рис. 6.6) поле волны E_{01} в

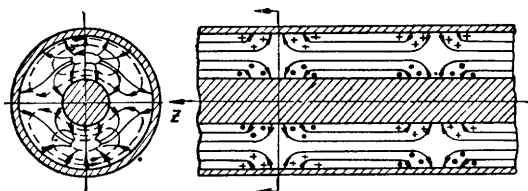


Рис. 6.7. Структура поля волны E_{11} в коаксиальном кабеле

коаксиальном кабеле постепенно переходит в поле волны E_1 между параллельными плоскостями.

На рис. 6.7 представлена структура поля волны E_{11} в коаксиальном кабеле.

§ 6.4. ВОЛНЫ H В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ

Волны типа H характеризуются наличием продольной составляющей магнитного поля

$$H_z = H'_z(r, \varphi) e^{i\omega t - \gamma z}. \quad (6.28)$$

Величина $H'_z(r, \varphi)$ определяется из мембранного уравнения

$$\nabla_S^2 H'_z + k^2 H'_z = 0 \quad (6.29)$$

которое решается при граничном условии

$$\frac{\partial H'_z}{\partial n} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{при } r = a, \\ \text{при } r = b. \end{array} \right. \quad (6.30)$$

Частное решение мембранного уравнения (6.29) в полярной системе координат имеет вид

$$H'_z = [A J_m(kr) + B Y_m(kr)] \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (6.31)$$

Граничное условие (6.30) приводит тогда к системе двух трансцендентных уравнений:

$$A J'_m(ka) + B Y'_m(ka) = 0, \quad (6.32)$$

$$A J'_m(kb) + B Y'_m(kb) = 0, \quad (6.33)$$

решения которой могут быть найдены из следующего трансцендентного уравнения

$$\frac{J'_m(ka)}{Y'_m(ka)} = \frac{J'_m(kb)}{Y'_m(kb)}. \quad (6.34)$$

При каждом заданном значении индекса m трансцендентное уравнение (6.34) удовлетворяется для бесконечной последовательности собственных чисел $k'_{m1}, k'_{m2}, \dots, k'_{mn}, \dots$. Решения уравнения (6.34), подобно решениям трансцендентного уравнения (6.25), табулированы и имеются в ряде источников¹⁾. Каждому значению собственного числа k'_{mn} соответствует своё решение, т. е. определённый вид колебаний H_{mn} , характеризуемый критической длиной волны

$$\lambda_{kp} = \frac{2\pi}{k'_{mn}}. \quad (6.35)$$

На рис. 6.8 представлена структура поля волны H_{11} в коаксиальном кабеле. Эта волна близка по своим свойствам к волне H_{11} в круглом волноводе. Как и в круглом волноводе, она обладает наименьшей критической частотой из всех типов волн H и E . На рис. 6.8а показано, в частности, распределение продольной составляющей магнитного поля H_z в плоскости поперечного сечения. Показаны функции азимутального и радиального распределения $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$. Вдоль окружности кабеля при $m=1$ укладывается одна целая волна поля, как и в круглом волноводе. Функция радиального распределения $R(r)$ имеет несколько более сложный вид, чем в круглом волноводе. Случай круглого волновода можно теперь рассматривать как частный случай, когда $b=0$. Функция $R(r)$ переходит при этом в бесселеву функцию 1-го рода 1-го порядка $J_1(kr)$. В общем случае, когда $b \neq 0$, функция

¹⁾ См., например, Справочник по волноводам, перевод под ред. Я. Н. Фельда, «Советское радио», 1952, стр. 84—85.

$R(r)$ отличается от бesselевой функции. Это различие выражается в том, что, наряду с граничным условием $\partial H_z / \partial n = 0$ при $r=a$, эта функция должна удовлетворять второму граничному условию $\partial H_z / \partial n = 0$ при $r=b$. Кривая $R(r)$ характеризуется поэтому касательными, параллельными оси абсцисс графика при $r=a$ и при $r=b$. Линии магнитного поля волны H_{11} имеют седлообразный вид, как и для волны H_{11} в круглом волноводе (рис. 6.8б). Линии электрического поля являются поперечными и идут перпендикулярно проводящим поверхностям. Когда внутренний радиус b обращается в нуль, поле (рис. 6.8) переходит в поле волны H_{11} в круглом волноводе.

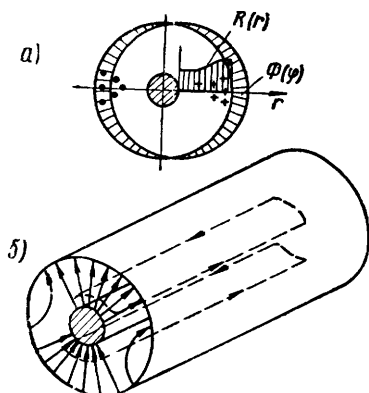


Рис. 6.8. Структура поля волны H_{11} в коаксиальном кабеле

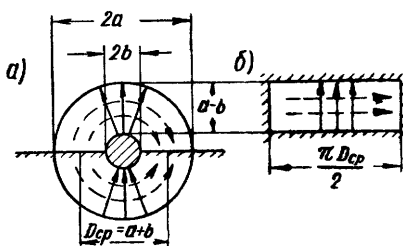


Рис. 6.9. Ячейки поля волны H_{11} и аналогия с волной H_{01} в прямоугольном волноводе

При соизмеримых радиусах a и b уместна несколько иная аналогия. На рис. 6.9а изображено поперечное сечение поля волны H_{11} . Из рисунка видно, что поле состоит из двух пространственных ячеек. Штриховкой показано, что можно, не нарушая граничных условий, вставить в кабель плоскую проводящую пластину, которая разбивает коаксиальный кабель на два волновода. Структуры полей в каждом таком волноводе близки к структуре поля волны H_{01} в прямоугольном волноводе (рис. 6.9б) со сторонами $d=a-b$ и $\frac{\pi D_{cp}}{2} = \frac{\pi(a+b)}{2}$. Поскольку структуры полей в волноводах рис. 6.9а, б мало различаются между собой, можно высказать предположение о том, что критическая длина волны коаксиального кабеля (рис. 6.9а) существенно не отличается от критической длины волны прямоугольного волновода (рис. 6.9б), т. е.

$$\lambda'_{11} \approx 2 \frac{\pi(a+b)}{2} = \pi(a+b). \quad (6.36)$$

На рис. 6.10 показан график критических длин волн, построенный на основе решений трансцендентного уравнения (6.34). На графике отложено отношение

$\frac{\lambda'_{11}}{a+b}$ в функции отношения радиусов b/a . Случай $b/a = 0$ соответствует круг-

лому волноводу и при этом $\lambda'_{11} \approx 3,41a$ (см. табл. 5.4). В случае же $b/a \approx 1$

отношение $\frac{\lambda'_{11}}{a+b} \approx \pi$, как это следует из соотношения (6.36).

Таким образом, кривая на графике идёт от 3,41 до π , причём на большем протяжении этой кривой её ординаты можно считать примерно равными π . Последнее подтверждает, что ф-ла (6.36) дает правильное приближённое значение критической длины волны λ'_{11} .

Не останавливаясь подробно на структуре поля волн H более высоких типов, отметим, что для полей H_{m1} ($m=1, 2, 3, \dots$) критическая длина волны определяется приближённой формулой

$$\lambda_{m1} \approx \frac{\pi(a+b)}{m}, \quad (6.37)$$

которая аналогична ф-ле (6.36). Таким образом с увеличением числа m вдоль окружности волновода критическая длина волны уменьшается обратно пропорционально m . Для волн H_{mn} при $a-b \ll a$ и $n \geq 2$

$$\lambda'_{mn} \approx \frac{2(a-b)}{n-1}. \quad (6.38)$$

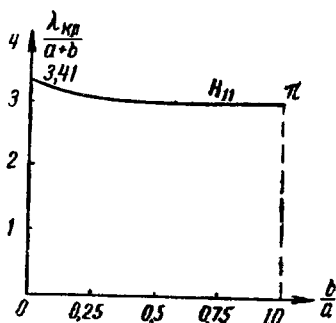


Рис. 6.10. График критических длин волн для колебаний H_{11} в коаксиальном кабеле

§ 6.5. ДИАГРАММА ТИПОВ ВОЛН КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ

На рис. 6.11 вдоль оси λ штриховкой показаны диапазоны длин волн, в пределах которых по коаксиальному кабелю распространяются соответствующие типы волн. Поперечные электромагнитные волны TEM распространяются для всех значений λ . Это следует из того, что критическая частота для волн TEM равна нулю, а критическая длина волны равна бесконечности. Из поперечно-электрических H и поперечно-магнитных E волн наибольшей критической длиной волны обладает волна H_{11} .

Диапазоном длин волн, в пределах которого коаксиальный кабель работает на волне основного типа TEM , является поэтому диапазон

$$\lambda'_{11} < \lambda \leq \infty, \quad (6.39)$$

что соответствует диапазону частот

$$f'_{11} > f \geq 0, \quad (6.40)$$

где

$$\lambda'_{11} \approx \pi(a+b) \text{ и } f'_{11} = c/\lambda'_{11}.$$

Таким образом, коаксиальный кабель нормально работает на волне основного типа, пока его поперечные размеры не станут соизмеримы с длиной волны λ . Критический случай наступает, когда средний периметр кабеля $\pi(a+b)$ становится равным длине волны.

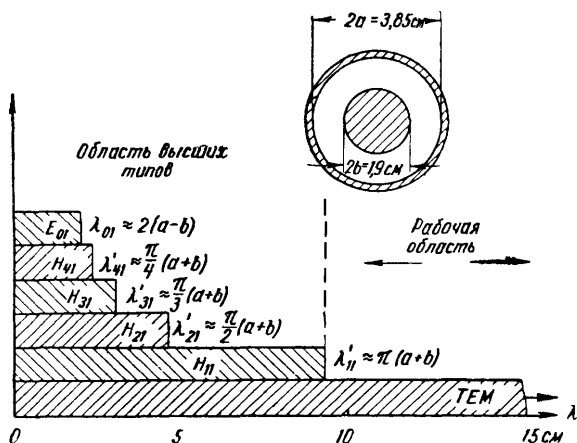


Рис. 6.11. Диаграмма типов волн коаксиального кабеля

Рисунок 6.12 поясняет нежелательные явления, которые возникают, если не выполнено условие (6.39) и $\lambda < \pi(a+b)$. На этом рисунке представлено разветвление кабеля. В направлении

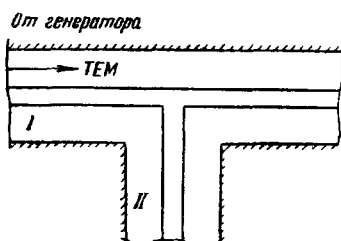


Рис. 6.12. Пояснение особенностей передачи при распространении по кабелю двух видов волн

к разветвлению от внешнего генератора по кабелю I распространяется волна *ТЕМ*. Во внутренний провод кабеля II при этом отводится ток. Вертикальный провод с током является для кабеля I не только источником отражённой волны основного типа, но и возбудителем волн высших типов. При этом в случае несоблюдения условия (6.39) волна высшего типа H_{11} будет распространяться по всему кабелю, интерферируя с волной основного типа *ТЕМ*. По-

этому условие (6.39) должно быть, как правило, выполнено. Это накладывает определённые ограничения на выбор размеров коаксиального кабеля, а следовательно, на величину передаваемой мощности и затухание.

§ 6.6. ПРЕДЕЛЬНАЯ И ДОПУСТИМАЯ МОЩНОСТИ КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ

Наиболее опасной с точки зрения электрического пробоя областью коаксиального кабеля является область в окрестности его внутреннего проводника при $r=b$. Пользуясь соотношением (6.9), амплитуду напряжённости электрического поля при $r=b$ представим в виде

$$E_{m0} = \frac{A}{b}. \quad (6.41)$$

Заменяя коэффициент A через амплитуду напряжения U_m из соотношения (6.11), получим

$$E_{m0} = \frac{U_m}{b \ln \frac{a}{b}}. \quad (6.42)$$

Передаваемую мощность при амплитуде напряжения U_m , волновом сопротивлении кабеля ρ_k и коэффициенте стоячей волны k_c можно представить в виде

$$P = \frac{U_m^2}{2 \rho_k k_c}. \quad (6.43)$$

Заменяя U_m через E_{m0} , а ρ_k его значением из ур-ния (6.17), найдём

$$P = \frac{b^2 E_{m0}^2 \sqrt{\epsilon_r}}{120 k_c} \ln \frac{a}{b}. \quad (6.44)$$

Отсюда находим выражение для *предельной* мощности ($E_{m0} = E_{пред}$ и $k_c = 1$)

$$P_{пред} = \frac{b^2 E_{пред}^2 \sqrt{\epsilon_r}}{120} \ln \frac{a}{b}. \quad (6.45)$$

Предельная мощность тем больше чем больше размеры кабеля. На коротких волнах размеры кабеля *ограничены*, поскольку средний периметр кабеля должен быть меньше длины волны

$$\pi D_{cp} = \pi(a+b) < \lambda,$$

где λ — длина волны в диэлектрике, заполняющем кабель. *Ограничена поэтому будет и предельная мощность.* Таким образом, получим

$$b \leq \frac{\lambda}{\pi \left(1 + \frac{a}{b}\right)}, \quad (6.46)$$

откуда

$$P_{пред} \leq \frac{E_{пред}^2 \lambda^2 \sqrt{\epsilon_r}}{120\pi^2} \frac{\ln \frac{a}{b}}{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2}. \quad (6.47)$$

Для трёхсантиметрового кабеля с воздушным заполнением (рис. 1.8) предельная мощность составляет всего 360 *квт*, что меньше, чем предельная мощность соответствующего волновода (допустимая рабочая мощность в 6—7 раз ниже предельной для линий с металлическими изоляторами и в 20 раз ниже предельной для линий с диэлектрическими опорными шайбами).

С укорочением длины волны λ при одновременном изменении размеров кабеля предельная и допустимая мощности убывают как λ^{-2} .

§ 6.7. ПОСТОЯННАЯ ЗАТУХАНИЯ ДЛЯ ВОЛНЫ ОСНОВНОГО ТИПА В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ

Постоянную затухания β можно найти, пользуясь ф-лой (4.91), в которой следует принять $dS = r dr d\varphi$, $\rho = \rho_0$, $H_{sm} = \frac{C}{r}$ (C —константа), H_{tm} и dl соответственно $\frac{C}{a}$ и $ad\varphi$ для окружности внешнего проводника и $\frac{C}{b}$ и $bd\varphi$ для окружности внутреннего проводника. Тогда получим

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{R_S}{\rho_0} \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{C^2}{a^2} ad\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{C^2}{b^2} bd\varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_b^a \frac{C^2}{r^2} r dr d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{R_S}{\rho_0} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}^1}{\ln \frac{a}{b}}. \quad (6.48)$$

Поскольку $b < a$, основная часть затухания связана с наличием *внутреннего* проводника.

Затухание тем меньше, чем больше размеры кабеля. С укорочением длины волны, когда приходится уменьшать размеры кабеля в соответствии с соотношением (6.46), а поверхностное сопротивление растёт соответственно соотношению (2.131), сильно

¹⁾ Выражение (6.48) можно получить так же, как для длинной линии с малыми потерями $\beta = R_1/\rho_k$, где R_1 —погонное активное сопротивление (см. ф-лу 1.1).

возрастает и затухание. Используя указанные соотношения, ф-лу (6.48) можно привести к виду

$$\beta \geq \frac{\varepsilon_r^{1/2}}{\pi \sqrt{480} \varepsilon_r^{1/2} \lambda^{3/2}} \frac{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b} \ln \frac{a}{b}}. \quad (6.49)$$

Как видно, постоянная затухания увеличивается с укорочением λ пропорционально $\lambda^{-3/2}$.

Как было показано на диаграмме (рис. 1.8), затухание типового трёхсантиметрового кабеля, которое составляет приблизительно около 0,2 дБ/м, примерно в два раза больше, чем затухание соответствующего волновода.

§ 6.8. ВЫБОР РАЗМЕРОВ КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ. ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Основными соображениями при выборе размеров кабеля являются:

1. Обеспечение необходимого рабочего диапазона.
2. Обеспечение передачи больших мощностей.
3. Обеспечение малого затухания.

Чтобы выполнить первое требование, достаточно выбрать радиус b в соответствии с условием (6.46), задаваясь отношением $\eta = \frac{a}{b}$. Последнее выбирается с точки зрения второго и третьего требований.

В частности, интерес представляют значения η , обеспечивающие максимум $P_{пред}$ или минимум β при условии, что радиус a внешнего проводника или длина волны λ фиксированы. Соответствующие четыре оптимальных значения η можно найти, приравнявая нулю производные $dP_{пред}/d\eta$, и $d\beta/d\eta$, найденные из соотношений (6.45), (6.47), (6.48) и (6.49) после замены $b = a/\eta$. Эти оптимальные значения η и получающиеся при них значения волнового сопротивления ρ_k (при $\varepsilon_r = 1$) приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Параметр кабеля, имеющий экстремальное значение	Заданный параметр кабеля	Оптимальное значение отношения $\eta = a/b$	Волновое сопротивление ρ_k при $\varepsilon_r = 1$ ом
Предельная мощность	Радиус внешнего проводника a	1,65	30
»	Рабочая длина волны λ	2,09	44
Коэффициент затухания	Радиус внешнего проводника a	3,60	77
«	Рабочая длина волны λ	4,68	93

При выборе отношения $\eta = a/b$ на свч доминирующим обычно является требование максимальной предельной мощности при заданной длине волны λ . В целях компромисса с требованием малых потерь чаще всего выбирают $\eta = \frac{a}{b} = (2 \div 2,5)$, что соответствует r_k для воздушной линии порядка 50 ом. Некоторое повышение значения η выгодно, так как при большем отношении a/b уменьшается влияние неизбежного эксцентриситета внутреннего проводника на волновое сопротивление.

В табл. 6.2 приведены данные для некоторых жёстких коаксиальных линий, волновое сопротивление которых близко к 50 ом.

Таблица 6.2

Наружный диаметр, мм	Толщина стенки, мм	Диаметр внутреннего проводника, мм	Волновое сопротивление ом	Опора	Предельная мощность кВт	Допустимая рабочая мощность, кВт	Постоянная затухания дБ/м	Наименьшая допустимая длина волны, см
7,8	0,625	3,125	44,4	Шайба	140	5	0,21	1,7
12,5	0,8	4,68	50,6	Металлический изолятор	358	50	0,2	2,7
15,6	0,875	6,25	47,8	Шайба	598	20	0,095	3,5
21,8	0,8	9,37	46,4	Металлический изолятор	1310	200	0,066	5,28
31,7	1,225	12,7	50,0	„	2530	400	0,045	7,18
41	1,225	18,95	53,4	„	4200	600	0,033	9,0

Предельная мощность в табл. 6.2 рассчитана для $E_{пред} \approx 30$ кв/см, исходя из того, что коаксиальные цилиндры не имеют опор. Допустимая рабочая мощность с учётом опор принята равной 15% от предельной для линий с металлическими изоляторами и 3,3% от предельной для линий с опорными шайбами. Величина затухания дана для медных линий. Посеребрённые линии вследствие влияния шероховатости поверхности при серебрении (см. также § 4.10) имеют затухание примерно на 60% больше, чем медные. Линии из латунных трубок имеют затухание примерно вдвое больше, чем медные. Приведённая в табл. 6.2 наименьшая допустимая длина волны принята на 12% больше, чем её приближённое значение из ф-лы (6.36). Последнее соответствует теоретическому графику (рис. 6.10) и подтверждается экспериментом.

На рис. 6.13 показана одна из возможных конструкций соединения жёстких коаксиальных линий. В целях поддержания боль-

шей однородности параметров край одного из внешних проводников скашивается, а другого — растачивается. Затем первый вводится внутрь второго, и они стягиваются болтами. Соединение внутренних проводников осуществляется при помощи пружины-

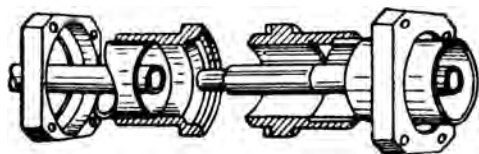


Рис. 6.13. Конструкция соединения жёстких коаксиальных линий

щего контакта. Штырь, входящий в гнездо, также несколько скашивается, вследствие чего контакт осуществляется на конце гнезда. Это предотвращает появление полостей между внутренней и внешней поверхностями.

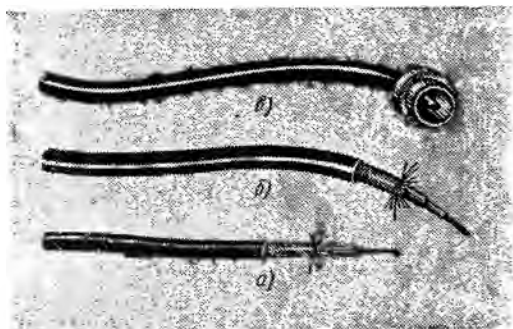


Рис. 6.14. Конструкции гибких коаксиальных кабелей

На рис. 6.14 показаны некоторые конструкции *гибких* коаксиальных кабелей. На рисунке видны оплётка, диэлектрик и центральный проводник. Кабели, в которых в качестве диэлектрика нанизывались бусинки на внутренний проводник (рис. 6.14а), вытесняются сейчас кабелями со сплошным, обычно полиэтиленовым заполнением (рис. 6.14б). Обычно кабель заканчивается специальной переходной фишкой (рис. 6.14в). Гибкие кабели используются главным образом в цепях с низким уровнем мощности — в измерительной аппаратуре и на входе радиоприёмных устройств, а также на выходе малоомощных передатчиков свч. В дециметровом диапазоне волновое сопротивление гибких кабелей выбирается порядка 70 ом , исходя из требований согласования с полуволновыми вибраторами и обеспечения меньших потерь.

Данные для некоторых стандартных гибких коаксиальных кабелей приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Марка	Наружный диаметр мм	Волновое сопротивление ом	Постоянная затухания, дБ/м			Допустимое рабочее напряжение, кВ
			100 МГц	300 МГц	3000 МГц	
РК-1	7,3	75—80	0,11	0,2	—	3
РК-2	9,6	90—95	0,09	0,15	—	4,5
РК-3	13,0	72—77	0,07	0,13	0,52	5,5
РК-6	12,4	50—55	0,05	0,12	0,58	4,5

Примечания:

1. Изоляция — стабилизированный полиэтилен.
2. Коэффициент укорочения длины волны в кабеле $1/\sqrt{\epsilon_r} \approx 1,5$.
3. Наружный проводник — оплётка из медной проволоки.
4. Наружная изоляция — хлорвинил.

В целом коаксиальные кабели, уступая на свч по ряду параметров волноводам (предельная мощность, затухание, механические соображения, диапазонность), используются в радиотехни-

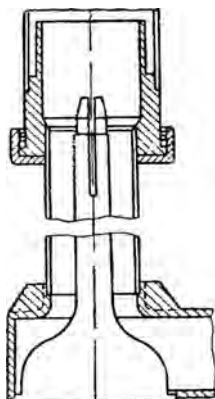


Рис. 6.15. Конструкция коаксиального вывода энергии из магнетрона

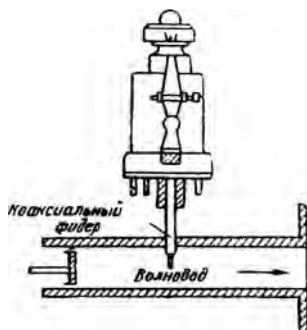


Рис. 6.16. Эскиз коаксиального вывода энергии из клистрона

ческих станциях на волнах длиннее 10 см как основной элемент фидерной системы. На более коротких волнах (а при больших мощностях и на 10 см) основным элементом фидерной системы становятся волноводы.

Но и в этом случае коаксиальные кабели не сразу теряют своё значение вспомогательных фидерных устройств. Они широко

используются, в частности, в различного рода измерительных приборах. В передатчиках сантиметровых волн используются коаксиальные вращающиеся сочленения и коаксиальный вывод энергии из магнетрона в волновод. Последний в ряде случаев оказывается проще, чем вывод энергии в волновод через отверстие. На рис. 6.15 показан пример конструкции коаксиального вывода, заканчивающегося «пуговичным» волноводным возбуждателем. Такое устройство может передавать в волновод мощность порядка мегаватта на длине волны $\lambda \approx 10$ см.

На волнах порядка 3 см в настоящее время стараются не делать коаксиального вывода из магнетрона и чаще используют связь магнетрона с волноводом через отверстие, показанное схематически на рис. 1.10. Однако для вывода энергии из клистрона коаксиальный фидер находит применение и в трёхсантиметровом диапазоне. Соответствующая конструкция схематически показана на рис. 6.16.

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

§ 7.1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Простейшим объёмным резонатором является волноводный резонатор, представляющий собой отрезок волновода, закороченный с обоих концов металлическими пластинами. Исследование полей в таких резонаторах сводится к отысканию решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих граничным условиям на стенках. Однако можно воспользоваться полученными выше результатами, если учесть, что короткое замыкание волновода есть частный случай его работы, соответствующий режиму стоячей волны. Это значит, что структура электромагнитного поля в резонаторе совпадает с соответствующей структурой поля стоячей волны в волноводе.

Чтобы не связывать себя в дальнейшем определённым типом волны и формой поперечного сечения волновода, предварительно обобщим математическую запись полей для режима бегущей волны и смешанного режима в волноводе без потерь и установим основные закономерности для режима стоячей волны. Вводимая ниже обобщённая форма записи будет использована и в последующих главах.

Вначале рассматриваются резонаторы без потерь волноводного типа, затем учитывается влияние потерь в резонаторе. В конце главы кратко рассматриваются объёмные резонаторы неволноводного типа.

§ 7.2. ОБОБЩЕННАЯ ЗАПИСЬ ДЛЯ РЕЖИМА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ И СМЕШАННОГО РЕЖИМА В ВОЛНОВОДЕ

В качестве примера вначале рассмотрим выражения для векторов поля бегущей волны типа H_{01} в прямоугольном волноводе без потерь:

$$\left. \begin{aligned} E_s &= E_{xm} \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - az)} x^0 \\ H_s &= \frac{E_{xm}}{\rho_H} \sin \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - az)} y^0 \\ H_z &= i \frac{E_{xm}}{\rho_H} \frac{\lambda_g}{2b} \cos \frac{\pi}{b} y e^{i(\omega t - az)} z^0 \end{aligned} \right\}. \quad (7.1)$$

В каждом из написанных выражений можно выделить:

1. Волновой множитель $e^{i(\omega t - az)}$, который описывает закон распределения поля вдоль координаты z для различных моментов времени.

2. Функцию распределения поля по координатам поперечного сечения, специфичную для данного типа волны. Функция распределения является *векторной*, характеризующей не только интенсивность, но и направление каждого из векторов поля для произвольной точки поперечного сечения.

3. Постоянный множитель, определяющий интенсивность поля.

Тогда, несколько в более общей форме выражения (7.1) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} E_s &= A F(x, y) e^{i(\omega t - az)} \\ H_s &= \frac{A}{\rho} G(x, y) e^{i(\omega t - az)} \\ H_z &= \frac{A}{\rho} g(x, y) e^{i(\omega t - az)} \end{aligned} \right\}, \quad (7.2)$$

где A — множитель, определяющий интенсивность поля, $\rho = \rho_H$ — волновое сопротивление и $F(x, y)$, $G(x, y)$, $g(x, y)$ — функции распределения поля по координатам поперечного сечения, которые будем далее называть *собственными функциями*. По существу, это те же функции распределения $E'_s(x, y)$, $H'_s(x, y)$, $H'_z(x, y)$ с точностью до множителей, соответствующих условно принятой за единицу интенсивности волны. Множитель $1/\rho$ в выражении для H_s вынесен за знак собственной функции с тем, чтобы при анализе смешанного режима волновода получались соотношения более близкие по записи к соответствующим соотношениям для длинной линии (в выражении для $g(x, y)$ множитель $1/\rho$ вынесен по аналогии с выражением для H_s). Для волны H_{01} функции распределения с точностью до константы C определяются так:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= C \sin \frac{\pi}{b} y x^0 \\ G(x, y) &= C \sin \frac{\pi}{b} y y^0 \\ g(x, y) &= iC \frac{\lambda_a}{2b} \cos \frac{\pi}{b} y z^0 \end{aligned} \right\}, \quad (7.3)$$

в чём легко убедиться путём непосредственной проверки. Если константу C положить равной единице, то $A = E_{xm}$. В некоторых случаях (см. гл. 8) удобным окажется специальный выбор константы C , тогда $A = E_{xm}/C$.

Выражения (7.2) описывают не только волну H_{01} , но и произвольную волну типа H , для которой $E_z = 0$, если соответственным образом будут видоизменены выражения для функций распределения. Ими можно пользоваться и для непрямоугольных волноводов произвольной формы сечения, и при использовании в поперечном сечении криволинейной, например, полярной системы координат.

Аналогичным образом можно записать и произвольную волну E :

$$\left. \begin{aligned} E_S &= A F(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ H_S &= \frac{A}{\rho} G(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ E_z &= A f(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)} \end{aligned} \right\}, \quad (7.4)$$

где $\rho = \rho_E$.

Таким образом, выражения:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad E_S &= A F(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ б) \quad H_S &= \frac{A}{\rho} G(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ в) \quad E_z &= A f(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ г) \quad H_z &= \frac{A}{\rho} g(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)} \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

описывают любую из бегущих волн типа H или E , распространяющихся вдоль координаты z (в волноводе без потерь). В случае волны типа H следует лишь положить, что $f(x, y) = 0$ в пределах всего сечения. Аналогично, в случае волны типа E в пределах всего сечения $g(x, y) = 0$. Приведённые выражения описывают также волну TEM , если принять и $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$.

При наличии обратных волн наряду с решениями вида $e^{i(\omega t - \alpha z)}$ надо учитывать решения, имеющие волновые множители $e^{i(\omega t + \alpha z)}$. Выражения для поперечных составляющих суммарного поля можно тогда представить так:

$$\left. \begin{aligned} E_S &= (A e^{-i\alpha z} + B e^{i\alpha z}) F(x, y) e^{i\omega t} \\ H_S &= \frac{1}{\rho} (A e^{-i\alpha z} - B e^{i\alpha z}) G(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\}. \quad (7.6)$$

Знак минус во втором из написанных выражений объясняется тем, что для обратной волны вектор H_S меняет знак, если знак E_S считать неизменным. Это было показано ранее на рис. 4.22, где одновременно были нанесены векторы плотности потока энергии прямой и обратной волн. Множители $(A e^{-i\alpha z} + B e^{i\alpha z})$ и $\frac{1}{\rho} (A e^{-i\alpha z} - B e^{i\alpha z})$, характеризующие распределение поля по ко-

ординате z , такие же, как для напряжения и тока длинной линии. Это позволяет *проводить параллель между распределением E_S и распределением напряжения в линии, а также между распределением H_S и распределением тока.*

Выражение для продольной составляющей поля H_z можно получить, связав её с поперечной составляющей электрического поля E_S . Приравнявая с этой целью продольные векторы в правой и левой частях уравнения Максвелла (3.31), можно написать

$$-i\omega\mu H_z = [\nabla_S E_S]. \quad (7.7)$$

Тогда, используя выражение (7.6) для E_S , найдём

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} (A e^{-iaz} + B e^{iaz}) [\nabla_S F(x, y)] e^{i\omega t}. \quad (7.8)$$

Поскольку при $B=0$ ур-ние (7.8) переходит в ур-ние (7.5г), имеем

$$g(x, y) = -\frac{\rho}{i\omega\mu} [\nabla_S F(x, y)]. \quad (7.9)$$

Из ур-ний (7.8) и (7.9) получим

$$H_z = \frac{1}{\rho} (A e^{-iaz} + B e^{iaz}) g(x, y). \quad (7.10)$$

Отметим, что закон изменения составляющей H_z вдоль оси z такой же, как и E_S .

Аналогично, пользуясь условием двойственности, можно записать

$$i\omega\varepsilon E_z = [\nabla_S H_S]. \quad (7.11)$$

Отсюда следует, что закон изменения E_z вдоль оси z таков же, как и H_S , т. е.

$$E_z = (A e^{-iaz} - B e^{iaz}) f(x, y) e^{i\omega t}. \quad (7.12)$$

где

$$f(x, y) = \frac{1}{i\omega\varepsilon\rho} [\nabla_S G(x, y)]. \quad (7.13)$$

Итак, *распределение продольной составляющей магнитного поля вдоль оси z на однородном участке волновода такое же, как поперечной составляющей электрического поля, а распределение продольной составляющей электрического поля такое же, как поперечной составляющей магнитного поля.*

В табл. 7.1 приведены выражения для собственных функций некоторых типов волн.

Таблица 7.1

Функция распределения	Типы волн		Примечание
	H_{mn}	E_{mn}	
а) для прямо-угольного волно-вода			
$F(x, y)$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left(-x^0 \frac{n \pi}{b} \times \right. \\ \times \cos \frac{m \pi}{a} x \sin \frac{n \pi}{b} y + \\ \left. + y^0 \frac{m \pi}{a} \sin \frac{m \pi}{a} x \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{n \pi}{b} y \right)$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left(x^0 \frac{m \pi}{a} \times \right. \\ \times \cos \frac{m \pi}{a} x \sin \frac{n \pi}{b} y + \\ \left. + y^0 \frac{n \pi}{b} \sin \frac{m \pi}{a} x \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{n \pi}{b} y \right)$	$k = \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$
$G(x, y)$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left(-x^0 \frac{m \pi}{a} \times \right. \\ \times \sin \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{n \pi}{b} y - \\ \left. - y^0 \frac{n \pi}{b} \cos \frac{m \pi}{a} x \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{n \pi}{b} y \right)$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left(-x^0 \frac{n \pi}{b} \times \right. \\ \times \sin \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{n \pi}{b} y + \\ \left. + y^0 \frac{m \pi}{a} \cos \frac{m \pi}{a} x \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{n \pi}{b} y \right)$	
$f(x, y)$	0	$D \sin \frac{m \pi}{a} x \sin \frac{n \pi}{b} y z^0$	
$g(x, y)$	$D \cos \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{n \pi}{b} y z^0$	0	
б) для круг-лого волно-вода			
$F(x, y)$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left[-r^0 \frac{m}{r} J_m(kr) \times \right. \\ \times \sin m \varphi + \varphi^0 k J'_m(kr) \times \\ \left. \times \cos m \varphi \right]$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left[r^0 k J'_m(kr) \times \right. \\ \times \cos m \varphi - \varphi^0 \frac{m}{r} J_m(kr) \times \\ \left. \times \sin m \varphi \right]$	
$G(x, y)$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left[r^0 k J'_m(kr) \times \right. \\ \times \cos m \varphi - \varphi^0 \frac{m}{r} J_m(kr) \times \\ \left. \times \sin m \varphi \right]$	$-\frac{\gamma}{k^2} D \left[r^0 \frac{m}{r} J_m(kr) \times \right. \\ \times \sin m \varphi + \varphi^0 k J'_m(kr) \times \\ \left. \times \cos m \varphi \right]$	

Функция рас- пределения	Типы волн		Примечание
	H_{mn}	E_{mn}	
$f(x, y)$	0	$D J_m(kr) \cos m \varphi z^0$	Для волны H_{mn} , $k = \frac{u_{mn}}{a}$
$g(x, y)$	$D J_m(kr) \cos m \varphi z^0$	0	Для волны E_{mn} , $k = \frac{u_{mn}}{a}$

Выражения табл. 7.1 легко получаются путём сопоставления с результатами гл. 4 и 5¹⁾. Их можно получить непосредственно, полагая $f(x, y) = z^0 f(x, y)$ и $g(x, y) = z^0 g(x, y)$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — решения скалярных мембранных уравнений, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям. Тогда для волн типа E легко определяется $F(x, y) = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad } f$, а для волн типа H —

$$G(x, y) = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad } g.$$

Связь между $F(x, y)$ и $G(x, y)$ вытекает из соотношений, имеющих место для векторов E_S и H_S в режиме бегущей волны:

$$E_S = \rho [H_S z^0] \text{ и } H_S = \frac{1}{\rho} [z^0 E_S], \quad (7.14)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} F &= [G z^0] \\ G &= [z^0 F] \end{aligned} \right\}. \quad (7.15)$$

§ 7.3. РЕЖИМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ. РЕЗОНАНСНЫЕ ОТРЕЗКИ ВОЛНОВОДА КАК ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Рассмотрим волновод без потерь, коротко замкнутый на конце (рис. 7.1). В целях более удобной записи конечных выражений оси координат расположены так, что короткозамыкающая плас-

¹⁾ Выражения (7.1) получаются из выражений табл. 7.1 для прямоугольного волновода, если положить $m = 0$, $n = 1$,

$$D = \frac{k^2}{\gamma} \frac{b}{\pi} E_{xm}.$$

тина находится в сечении $z=0$. Используя граничное условие $E_S=0$ при $z=0$, можно установить связь между коэффициентами A и B , характеризующими интенсивность прямой и отражённой волн,

$$A e^{-iaz} + B e^{iaz} \Big|_{z=0} = A + B = 0$$

или

$$B = -A. \quad (7.16)$$

Отсюда видно, что амплитуда отражённой волны равна амплитуде падающей ($|B| = |A|$).

Используя соотношение (7.16), получим:

$$\begin{aligned} A e^{-iaz} + B e^{iaz} &= A (e^{-iaz} - e^{iaz}) = -i 2A \sin \alpha z, \\ A e^{-iaz} - B e^{iaz} &= A (e^{-iaz} + e^{iaz}) = 2A \cos \alpha z. \end{aligned}$$

Тогда выражения для составляющих поля преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} E_S &= -i 2A \sin \alpha z F(x, y) e^{i\omega t} \\ H_S &= \frac{2A}{\rho} \cos \alpha z G(x, y) e^{i\omega t} \\ E_z &= 2A \cos \alpha z f(x, y) e^{i\omega t} \\ H_z &= -i \frac{2A}{\rho} \sin \alpha z g(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\}. \quad (7.17)$$

На рис. 7.1 показано распределение составляющих поля стоячей волны вдоль координаты z . Узлы стоячей волны у короткозамыкающей пластины для составляющих E_S и H_z связаны

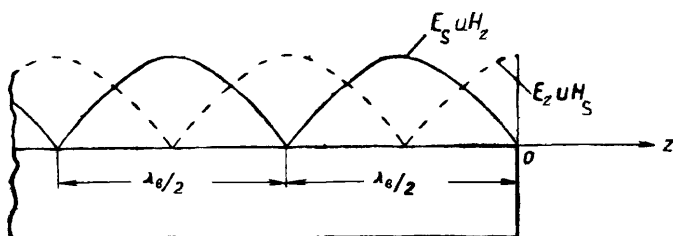


Рис. 7.1. Распределение составляющих поля стоячей волны вдоль координаты z

с граничными условиями $E_z = 0$ и $H_n = 0$. Пучность продольной составляющей электрического поля E_z у проводящей пластины связана с образованием поверхностного заряда на пластине и

концентрацией обусловленного им нормального электрического поля. Пучность поперечной составляющей магнитного поля H_s у пластины связана с протеканием по ней поверхностного тока и концентрацией обусловленного им тангенциального магнитного поля.

Если в одном из узлов поперечной составляющей электрического поля сделать короткое замыкание, то режим стоячей волны в закороченном с обоих концов отрезке волновода нарушен не будет, так как не нарушаются граничные условия. Получающийся режим (рис. 7.2) можно рассматривать двояко:

1) как режим свободных колебаний системы без потерь, когда ей сообщён некоторый запас энергии;

2) как резонансный режим установившихся колебаний системы без потерь, когда поступления мощности на поддержание колебаний больше не требуется.

Это значит, что закороченный с обоих концов отрезок волновода представляет собой *колебательную систему, собственные частоты которой f_0 совпадают с резонансными $f_{рез}$* , как и для любой другой колебательной системы без потерь — одиночного колебательного контура, отрезка длинной линии и т. д.

Резонансные (а значит, и собственные) частоты легко находятся из условия, что при резонансе длина l закороченного отрезка волновода равна расстоянию между узлами стоячей волны E_s , т. е. целому числу p полуволн в волноводе:

$$\alpha l = \frac{2\pi}{\lambda_g} l = p\pi$$

и

$$l = p \frac{\lambda_g}{2}.$$

Длина волны в волноводе выражается, в свою очередь, через резонансное значение длины волны генератора $\lambda = \lambda_{рез}$, т. е.

$$\lambda_g = \frac{2l}{p} = \frac{\lambda_{рез}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{рез}}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Решая полученное уравнение относительно $\lambda_{рез}$, находим

$$\lambda_{рез} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_{кр}^2} + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}}. \quad (7.19)$$

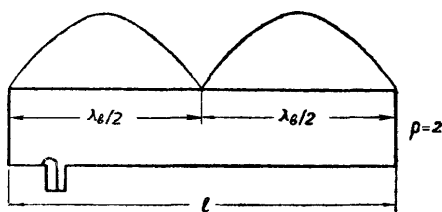


Рис. 7.2. Иллюстрация резонансного режима

Определённая таким образом резонансная длина волны представляет собой длину волны в свободном пространстве, соответствующую резонансной (собственной) частоте резонатора $f_{рез}$. Последняя определяется как

$$f_{рез} = \frac{c}{\lambda_{рез}}, \quad (7.20)$$

где c — скорость света.

Каждый волноводный резонатор имеет бесконечный спектр дискретных собственных колебаний, определяемых, с одной стороны, числом полуволн p , укладывающихся вдоль резонатора, и, с другой стороны, типом волны в волноводе.

§ 7.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ВОЛНОВОДНОМ РЕЗОНАТОРЕ БЕЗ ПОТЕРЬ

Сущностью любого колебательного процесса является переход энергии из одной формы в другую. Например, при колебаниях маятника потенциальная энергия периодически преобразуется в кинетическую. В колебательном контуре или в отрезке длинной линии электрическая энергия периодически переходит в магнитную, магнитная в электрическую. Очевидно, что и для объёмного резонатора сущность колебательного процесса сводится к преобразованию энергии из энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Чтобы количественно оценить энергетические соотношения при колебательном процессе, воспользуемся выражениями для энергии электрического поля $W_{э}$ и энергии магнитного поля $W_{м}$, содержащихся в каждый момент времени в пределах замкнутого объёма V :

$$\left. \begin{aligned} W_{э} &= \int_V \frac{\epsilon E^2}{2} dV \\ W_{м} &= \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV \end{aligned} \right\}. \quad (7.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} E^2 &= E_s^2 + E_z^2, \\ H^2 &= H_s^2 + H_z^2, \end{aligned}$$

где каждая из составляющих электрического и магнитного полей является гармонической функцией времени. Поэтому, чтобы установить характер изменения $W_{э}(t)$ и $W_{м}(t)$ как функций времени, следует выяснить в первую очередь фазовые соотношения отдельных составляющих поля.

При комплексной записи синусоидально изменяющихся величин, которая использовалась выше, фазы определяются входящими в выражения для этих величин комплексными множителями. Отметим, что входящие в выражения орты x^0, y^0, z^0 , характеризующие пространственную ориентацию векторов F, G, f, g , ничего не говорят о законе изменения во времени и не должны учитываться как комплексные множители. Поэтому можно утверждать, что функции $F(x, y)$ и $G(x, y)$, связанные соотношением (7.15), имеют одинаковый фазовый множитель $e^{i\psi}$ (в частном случае $\psi = 0$). Тогда функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, определяемые соотношениями (7.9) и (7.13), характеризуются соответственно множителями $\frac{1}{i} e^{i\psi} =$

$$= e^{i\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)} \text{ и } -\frac{1}{i} e^{i\psi} = e^{i\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Считая для простоты в выражениях (7.17) общий коэффициент A вещественным и беря от этих выражений реальную часть, предварительно заменив $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, получим следующие пропорциональные зависимости, характеризующие закон изменения составляющих поля во времени:

$$\left. \begin{aligned} E_s &\equiv \cos\left(\omega_0 t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) \\ H_s &\equiv \cos(\omega_0 t + \psi) \\ E_z &\equiv \cos\left(\omega_0 t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) \\ H_z &\equiv \cos(\omega_0 t + \psi) \end{aligned} \right\}. \quad (7.22)$$

Отсюда следует, что

1) поперечная и продольная составляющие электрического поля в волноводном резонаторе изменяются во времени синфазно. Поэтому энергия электрического поля изменяется во времени по тому же закону, что и квадрат каждой из этих составляющих;

2) поперечная и продольная составляющие магнитного поля изменяются во времени также синфазно. Поэтому энергия магнитного поля изменяется, как квадрат каждой из составляющих магнитного поля;

3) составляющие электрического и магнитного полей изменяются во времени со сдвигом фаз 90° , т. е. в тот момент времени, когда электрическое поле достигает максимума, магнитное поле становится равным нулю и наоборот. Это значит, что в такие моменты времени энергия будет целиком сконцентрирована в форме электрического (либо магнитного) поля.

Поскольку для резонатора без потерь суммарная энергия электромагнитного поля во времени не меняется и равна энергии, запасённой в начале колебательного процесса, имеем

$$W_{\mathcal{E}}(t) + W_M(t) = W_{\mathcal{E}}. \quad (7.23)$$

Поэтому максимальное значение каждой из энергий $W_{\mathcal{E}}(t)$ и $W_M(t)$ равно $W_{\mathcal{E}}$ и можно написать:

$$\left. \begin{aligned} W_M &= W_{\mathcal{E}} \cos^2(\omega_0 t + \psi) = \frac{1}{2} W_{\mathcal{E}} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \psi)] \\ W_{\mathcal{E}} &= W_{\mathcal{E}} \sin^2(\omega_0 t + \psi) = \frac{1}{2} W_{\mathcal{E}} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \psi)] \end{aligned} \right\}. \quad (7.24)$$

Графики изменения энергии электрического и магнитного полей во времени представлены на рис. 7.3.

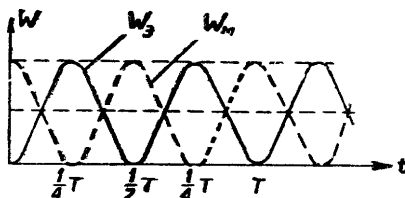


Рис. 7.3. Графики изменения энергий электрического и магнитного полей во времени

Как и для обычного контура, для волноводного резонатора можно ввести понятие колебательной мощности. Колебательной будем называть мощность, поступающую из магнитного поля в электрическое. Дифференцируя по времени выражения для $W_{\mathcal{E}}$, можно получить

$$P_{\kappa} = \frac{dW_{\mathcal{E}}}{dt} = \omega_0 W_{\mathcal{E}} \sin 2(\omega_0 t + \psi). \quad (7.25)$$

В соответствии с графиком рис. 7.3, колебательная мощность каждые четверть периода меняет знак.

Максимальное значение колебательной мощности равно

$$P_{\kappa \text{ макс}} = \omega_0 W_{\mathcal{E}}. \quad (7.26)$$

§ 7.5. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

Прямоугольный резонатор представляет собой закороченный с обоих концов отрезок прямоугольного волновода (рис. 7.4). Резонансная длина волны (как мера резонансной частоты резона-

тора) определяется из соотношения (7.19), которое после подстановки выражения для критической длины волны (4.62) принимает вид

$$\lambda_{рез} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (7.27)$$

Таким образом, резонансная длина волны определяется размерами a, b, l резонатора и целыми числами m, n, p , которые показывают число стоячих полуволн, укладываемых вдоль каждого из этих размеров.

Структура поля определяется приведенными выше выражениями, которые будем рассматривать, сопоставляя их с найденными ранее для бегущих волн.

В качестве первого примера рассмотрим структуру поля волны H_{011} в прямоугольном резонаторе. Как и бегущая волна H_{01} в прямоугольном волноводе, это — поперечно-электрическая волна с однородным полем вдоль оси x ($m=0$) и с одной стоячей полуволной поля по оси y ($n=1$). Однако вдоль оси z распределение амплитуд не является равномерным, как при бегущей волне, вдоль размера l резонатора укладывается одна стоячая полуволна ($p=1$).

Сравним между собой выражения для поперечных составляющих электрического поля бегущей и стоячей волн:

$$E_S = A F(x, y) e^{i(\omega t - \alpha z)},$$

$$E_S = A F(x, y) e^{i\omega t} (-2i \sin \alpha z).$$

Эти выражения сходны в том отношении, что распределение по координатам поперечного сечения x и y одинаково, так как определяется в обоих случаях одной и той же функцией $F(x, y)$. Однако имеется различие в распределении поля вдоль оси z для различных моментов времени. В первом случае имеем закон бегущей волны

$$E_S(z, t) \equiv \cos(\omega t - \alpha z + \varphi),$$

характеризуемый постоянством амплитуды и линейным изменением фазы вдоль направления распространения, во втором случае — закон стоячей волны

$$E_S(z, t) \equiv \sin \alpha z \cos(\omega t + \varphi),$$

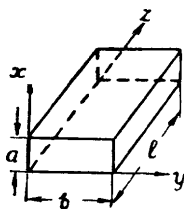


Рис. 7.4 Прямоугольный резонатор

характеризуемый синусоидальным изменением амплитуды вдоль направления распространения и постоянством фазы в пределах каждой полуволны между двумя узлами (рис. 7.5 а и б).

Если же взять фиксированный момент времени t , например, $t=0$, то распределение поля вдоль оси z подчиняется в этот момент времени одному и тому же синусоидальному закону, но для резонатора полуволна электрического поля располагается так, чтобы удовлетворялись граничные условия на его торцевых стенках.

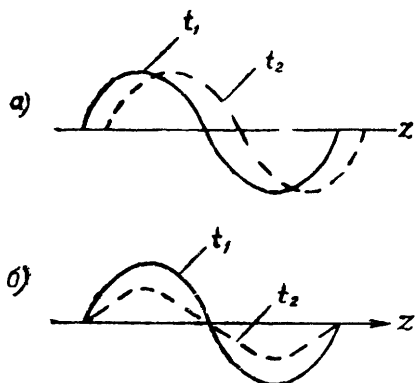


Рис. 7.5. Распределение поля в режимах бегущей и стоячей волн для различных моментов времени

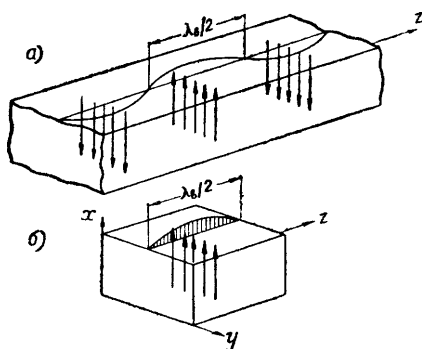


Рис. 7.6. Соответствие структур электрического поля при бегущей и при стоячей волнах

Таким образом, для фиксированного момента времени электрическое поле H_{011} резонатора можно изобразить, выделив из бегущей волны (рис. 7.6а) участок $\lambda_g/2$, соответствующий граничному условию на торцевых стенках $E_\tau=0$ (рис. 7.6б).

Прежде чем обратиться к структуре магнитного поля, рассмотрим распределение в пространстве токов смещения. Из выражения для плотности тока смещения

$$\mathbf{j}_{cm} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i \omega \epsilon \mathbf{E} = \omega \epsilon \mathbf{E} e^{i \frac{\pi}{2}}$$

следует, что ток смещения определяется скоростью изменения электрического поля и, будучи ёмкостным током, опережает электрическое поле во времени на четверть периода.

При бегущей волне такое опережение одновременно означает опережение в пространстве по сравнению с волной электрического поля на $\lambda_g/4$ (скорость изменения электрического поля $\frac{\partial E}{\partial t}$ наибольшая там, где поле E проходит через нуль, см. рис. 2.14).

Иначе обстоит дело в случае стоячей волны. Здесь, как это видно из рис. 7.7, наибольшая скорость изменения электрического

поля во времени $\frac{\partial E}{\partial t}$ имеет место для тех сечений $z = \text{const}$, где электрическое поле имеет наибольшую амплитуду. Наоборот, скорость $\frac{\partial E}{\partial t}$ равна нулю в узловых сечениях, где электрическое поле не меняется. Однако наступление во времени максимальных значений электрического поля и тока смещения по-прежнему происходит неодновременно. Когда электрическое поле, меняя своё направление, обращается в нуль, токи смещения достигают своих максимальных значений (так же как маятник достигает макси-

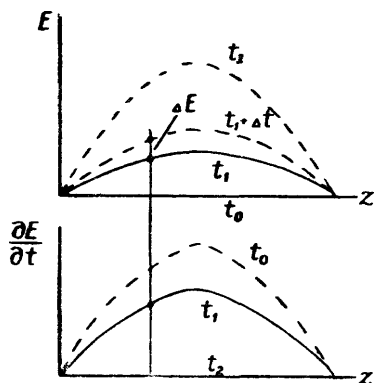


Рис. 7.7. Пояснение отсутствия пространственного сдвига стоячих волн электрического поля и тока смещения

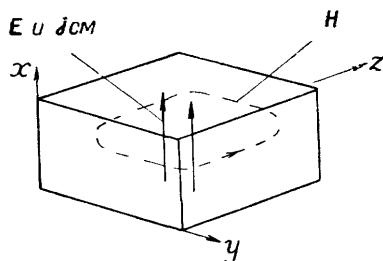


Рис. 7.8. Взаимное расположение линий электрического и магнитного полей при волне H_{011} в прямоугольном резонаторе

мальной скорости при переходе через нейтральное положение). Ток смещения при этом наиболее интенсивен в том самом месте, где четверть периода спустя будет наибольшее электрическое поле.

Таким образом, при стоячей волне, как и при бегущей, ток смещения опережает по времени электрическое поле на четверть периода, однако распределение его в пространстве совпадает с пространственным распределением электрического поля.

Линии магнитного поля замыкаются вокруг линий тока смещения, а для стоячей волны — одновременно вокруг линий электрического поля (рис. 7.8). По сравнению с расположением для бегущей волны магнитное поле смещено при этом вдоль оси z на четверть длины волны в волноводе, что обеспечивает выполнение на торцевых стенках граничного условия $H_n = 0$ наряду с граничным условием $E_\tau = 0$. По времени, как и ток смещения, магнитное поле сдвинуто относительно электрического на четверть периода. В тот момент, когда электрическое поле достигает максимума, магнитное поле равно нулю и, наоборот, что согласуется

с закономерностями превращения энергии, рассмотренными в § 7.4.

Линии электрического поля заканчиваются *зарядами на стенках*, с поверхностной плотностью $\rho_s = \varepsilon E_n$. Заряды достигают максимума одновременно с электрическим полем. Токи смещения замыкаются *поверхностными токами по стенкам*, плотность которых равна $j_s = H_\tau$. Поверхностные токи достигают максимума во времени одновременно с токами смещения и магнитным полем.

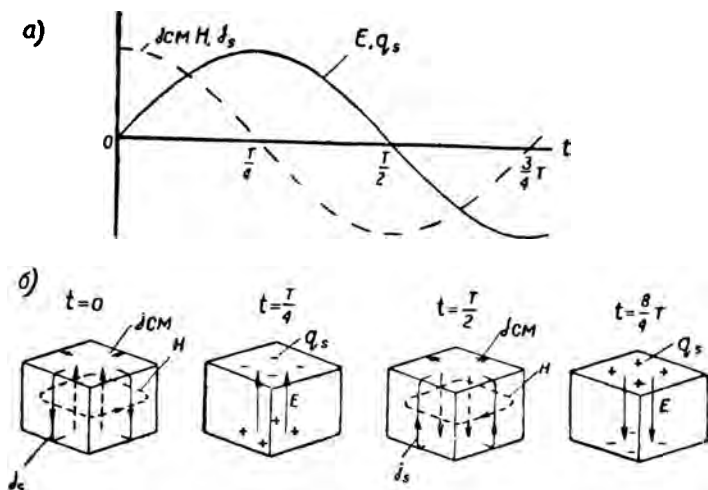


Рис. 7.9. Графики изменения полей, токов и зарядов (а) и структуры их для характерных моментов времени (б) при волне H_{011} в прямоугольном резонаторе

На рис. 7.9 изображены графики, характеризующие изменение во времени электрического и магнитного полей, тока смещения, поверхностных токов и зарядов и структуры их для моментов времени, когда одно из полей — электрическое или магнитное — становится максимальным, а второе — исчезает. Во все промежуточные моменты времени существует как электрическое, так и магнитное поля, на стенках наводятся поверхностные заряды и одновременно по ним протекают поверхностные токи.

Подобным же образом можно построить любую структуру поля волн типа E и волн типа H в прямоугольном резонаторе. Например, на рис. 7.10а изображена структура поля волны H_{012} , которая получается, если из структуры электрического поля волны H_{01} в прямоугольном волноводе в соответствии с граничными условиями выделить две полуволны и дополнить их соответствующими линиями магнитного поля, окружающими электрические силовые линии. Подобное же построение для волны E_{111} приведено на

рис. 7.10б (здесь выделяется одна стоячая полуволна поля). Случай волны E_{110} иллюстрируется на рис. 7.10в. Поскольку при $p=0$ значение $\lambda_{рез} = \lambda_{кр}$, то при этом $\lambda_g = \frac{\lambda_{рез}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{рез}}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$ обра-

щается в бесконечность. На рис. 7.10в показано выделение участка поля длиной l при $\lambda_g \rightarrow \infty$, соответствующего граничным условиям на торцевых стенках $E_x = 0$.

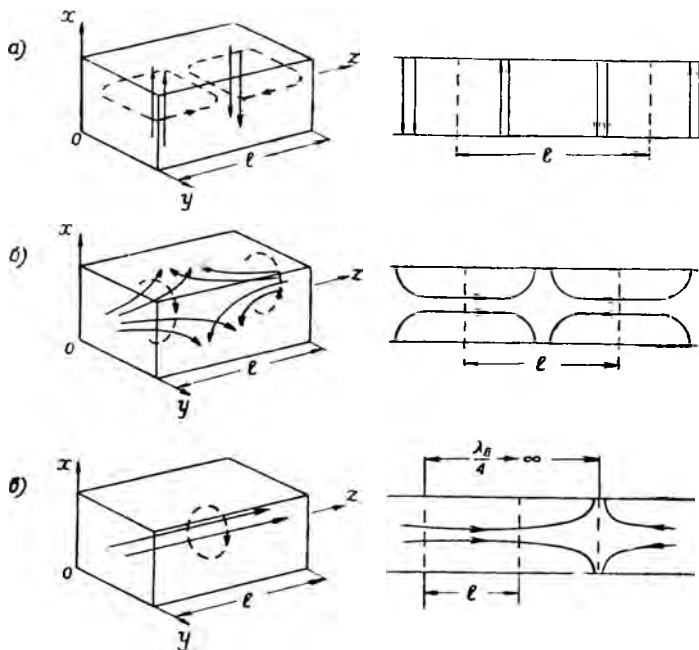


Рис. 7.10. Электромагнитные поля колебаний H_{012} , E_{111} и E_{110} в прямоугольном резонаторе для фиксированного момента времени и соответствующие им структуры электрического поля в прямоугольном волноводе

Каждую из структур можно было бы построить так же, исходя непосредственно из соотношений (7.17), после подстановки в них значений собственных функций, приведённых в табл. 7.1. Из ф-л (7.17), в частности, следует, что у волны с нулевым индексом p , для которой $\alpha = p \frac{\pi}{l} = 0$, могут быть только две составляющие E_z и H_y и, следовательно, подобная волна может быть только волной типа E . Именно эти две составляющие E_z и H_y можно видеть на рис. 7.10в для волны E_{110} . Волн типа H с нулевым индексом p быть не может.

Поскольку у волн типа E ни один из индексов m и n не может быть равным нулю, а у волн типа H может быть равен нулю лишь один из этих индексов, делаем вывод, что *при любой волне в прямоугольном резонаторе только один из трёх индексов m , n и p может быть равен нулю*.

Волны E и H с двумя единичными и одним нулевым индексом сходны по структуре. Легко видеть, что если изменить оси координат, то волну E_{110} (рис. 7.10 *в*) можно просто переименовать в волну H_{011} (рис. 7.8).

Как и для волноводов, в качестве элементов связи с объёмными резонаторами применяют штыри, витки и отверстия в проводящих стенках. Если штырь или виток ввести в резонатор, в котором имеется электромагнитное поле, то в штыре наводится наибольшая эдс, когда он ориентирован вдоль линий электрического поля, а в витке — когда он ориентирован перпендикулярно линиям магнитного поля. Излучение энергии через щель происходит в том случае, когда она перерезает линии поверхностного тока. На рис. 7.11 показано возможное расположение элементов связи для колебаний H_{011} в прямоугольном резонаторе.

Если к элементу связи подвести электромагнитную энергию от генератора синусоидальных колебаний, работающего на частоте

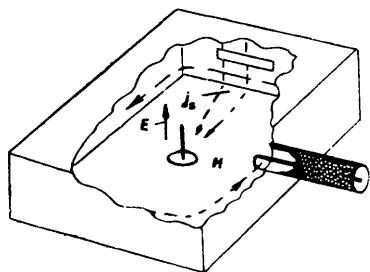


Рис. 7.11. Возможное расположение элементов связи при колебаниях H_{011} в прямоугольном резонаторе

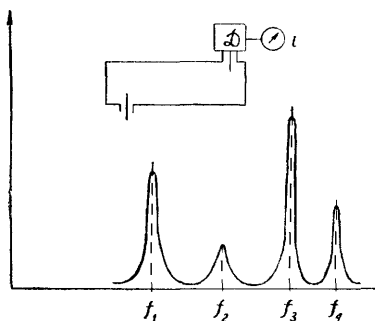


Рис. 7.12. Резонансная кривая объёмного резонатора с возбуждающим и приёмным элементами связи

ω , то в резонаторе будут возбуждаться колебания всех типов, для которых имеется составляющая электрического поля вдоль штыря, составляющая магнитного поля, перпендикулярная плоскости витка (или составляющая поверхностного тока, перерезающая щель). Колебания будут возбуждаться особенно интенсивно, если частота ω подводимых колебаний близка к частоте собственных колебаний резонатора. Поскольку объёмный резонатор имеет бесконечное множество дискретных собственных частот, то при изменении подводимой частоты генератора можно наблюдать ряд

резонансов, например, по показаниям прибора, подключённого к приёмному элементу связи через кристаллический детектор (рис. 7.12).

Если резонансные кривые являются достаточно острыми, то при каждом из резонансов подчёркивается только один из видов колебаний. *Структура поля на каждой из резонансных частот близка к структуре поля того вида колебаний, для которого имеет место резонанс.*

Резонанс на том или ином виде колебаний может быть достигнут не только путём изменения частоты генератора, но также и путём изменения настройки резонатора за счёт изменения размеров резонатора, например длины резонатора l . Последнее аналогично настройке колебательного контура в резонанс путём изменения ёмкости или индуктивности.

Структуры полей волн различных видов можно исследовать при помощи специальных лабораторных резонаторов. В стенках таких резонаторов прорезаются щели, закрываемые подвижными проводящими планками, вдоль каждой из которых закрепляется приёмный виток или приёмный штырь. Перемещая соответствующий элемент связи вдоль стенки, по показаниям подключённого через кристаллический детектор микроамперметра можно судить о распределении составляющей электрического поля, параллельной штырю, или составляющей магнитного поля, перпендикулярной витку.

Знание структуры поля помогает ориентироваться в ряде вопросов, связанных с деформацией резонатора, прорезанием отверстий в стенках и т. п. При прорезании отверстия, например, происходит не только излучение из резонатора, но и меняется его собственная частота. Собственная частота резонатора меняется также при введении в него металлической пробки в виде стержня или винта.

В качестве примера обратимся к колебаниям H_{011} . Исходя из структур электрического и магнитного полей и картины поверхностных токов, можно провести аналогию с системой из ёмкости в виде пары параллельных пластин и ряда присоединённых к ней индуктивностей в виде витков (рис. 7.13). Прорезание щели в боковой стенке до некоторой степени эквивалентно разрыву части параллельно соединённых индуктивностей, что приводит к росту эквивалентной индуктивности, а стало быть, к уменьшению частоты собственных колебаний резонатора.

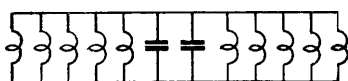
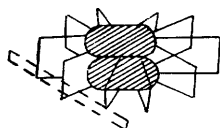


Рис. 7.13. Аналогия с системой индуктивностей и ёмкостей для колебаний H_{011} в прямоугольном резонаторе

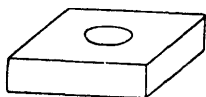


Рис. 7.14. Резонатор с отверстием в верхней стенке

Наоборот, отверстие в стенке, показанное на рис. 7.14, уменьшает общую ёмкость, что ведёт к увеличению собственной частоты. Если через отверстие (рис. 7.14) ввести металлическую пробку, общая ёмкость увеличится, а собственная частота уменьшится. Введение подобной же металлической пробки через отверстие в боковой стенке ведёт к уменьшению индуктивности части параллельно соединённых витков; при этом общая индуктивность уменьшается, а собственная частота возрастает. Изложенные простые соображения согласуются с результатами более строгого электродинамического характера.

§ 7.6. КРУГЛЫЙ РЕЗОНАТОР

Круглый резонатор (рис. 7.15) представляет собой закороченный с двух сторон отрезок круглого волновода. Выражение для резонансной длины волны легко определяется из соотношения (7.19), если в него подставить соответствующее значение критической длины волны (5.19) или (5.28). Для волн типа E тогда будем иметь

$$\lambda_{рез} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{u_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}, \quad (7.28)$$

а для волн типа H

$$\lambda_{рез} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{u'_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (7.29)$$

Здесь u_{mn} — корень бесселевой функции 1-го рода m -го порядка, n -й по счёту, а u'_{mn} — корень производной этой функции также n -й по счёту. Значения корней u_{mn} и u'_{mn} для различных целых m и n приведены в табл. 5.1 и 5.3.

Как и в круглом волноводе, индекс m показывает число целых волн, укладывающихся по окружности резонатора, а n — номер соответствующего корня бесселевой функции или её производной, характеризующий распределение поля стоячей волны от $r=0$ до $r=a$. Распределение соответствующей продольной составляющей поля E_z или H_z вдоль координаты r определяется всегда функцией Бесселя соответствующего порядка, взятой для значений своего аргумента в пределах от нуля до $ka=u_{mn}$ для волн типа E и от нуля до $ka=u'_{mn}$ для волн типа H .

На рис. 7.16 показаны примеры структур полей в круглых резонаторах, а именно структуры полей для колебаний E_{010} , E_{011} ,

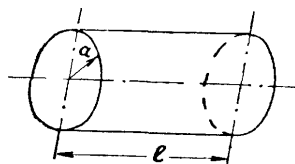


Рис. 7.15. Круглый резонатор

H_{011} , H_{111} . Как и в случае прямоугольных резонаторов, индекс p может иметь нулевое значение только для волн типа E .

Связь с круглыми резонаторами осуществляется при помощи штырей, витков и отверстий по тем же правилам, что и для прямоугольных резонаторов. Соображения относительно подстройки собственной частоты также можно распространить на круглые

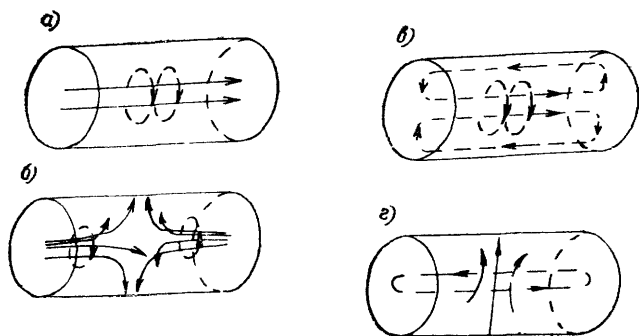


Рис. 7.16. Структуры полей колебаний E_{010} , E_{011} , H_{011} , H_{111} в круглом резонаторе

резонаторы. Так, например, введение металлической пробки вдоль линий электрического поля волны H_{111} эквивалентно увеличению ёмкости и понижает собственную частоту.

Как правило, различные типы волн имеют разные собственные частоты. Однако для некоторых отличающихся между собой типов волн собственные частоты совпадают. Такие типы волн называются *вырожденными*. К числу вырожденных волн относятся, например, H_{01p} и E_{11p} . Эффект вырождения связан с тем, что корень производной функции Бесселя нулевого порядка равен корню функции Бесселя 1-го порядка: $u'_{01} = u_{11}$. Деформация стенок неодинаково сказывается на каждом из вырожденных типов волн. При малой деформации стенок собственные частоты для волн H_{01p} и E_{11p} несколько расходятся между собой. В спектре собственных частот резонатора образуется так называемый *дублет* (рис. 7.17).

Вырожденными можно считать и два колебания H_{11p} , для которых векторы электрического поля поляризованы во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Если подобрать нужное соотношение их амплитуд и фаз, можно возбудить колебания H_{11p} с круговой поляризацией. При деформации стенок, показанной на рис. 7.18, вырождение исчезнет и в спектре собственных частот появится дублет. Поскольку штырь (рис. 7.18) возбуждает одновременно два деформированных поля H_{11p} с несколько отличающимися собственными частотами, то, если резонансные кривые дублета перекрываются, может иметь место *двугорбый* участок

результатирующей резонансной кривой. Явление вырождения и возможность образования дублетов в деформированных резонато-

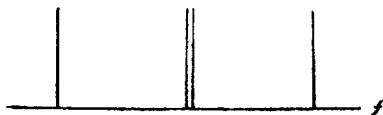


Рис. 7.17. Дублет в спектре собственных частот резонатора

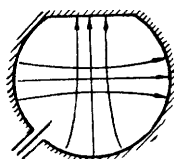


Рис. 7.18. Возбуждение дублета колебаний $H_{11\rho}$ в деформированном резонаторе

рах произвольной конфигурации нужно учитывать при практическом их использовании в измерительной аппаратуре и в генераторах свч.

§ 7.7. КОАКСИАЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

К числу волноводных резонаторов можно отнести коаксиальный резонатор в виде отрезка коаксиальной линии, замкнутой с обоих концов проводящими пластинами (рис. 7.19). Наиболее важным для этих резонаторов является резонанс на основном типе волны TEM . Поскольку для этого типа волны $\lambda_{кр} = \infty$, то резонансные значения длины волны находятся из выражения

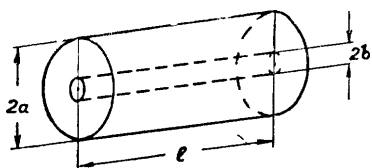


Рис 7.19. Коаксиальный резонатор

$$\lambda_{рез} = \frac{2l}{p}, \quad (7.30)$$

т. е. резонанс имеет место, когда длина резонатора

$$l = p \frac{\lambda_{рез}}{2}. \quad (7.31)$$

Последнее соотношение известно также из теории длинных линий. На рис. 7.20 показано распределение поля при стоячей волне TEM_p для случая, когда $p=1$.

Что касается волн H и E , то они чаще всего встречаются как паразитные. С ними нужно считаться при перестройке резонатора в диапазоне частот. Расчёт резонансных значений длины волны

для этих типов волн можно произвести по общей ф-ле (7.19), если заменить $\lambda_{кр}$ в этой формуле через корень соответствующего

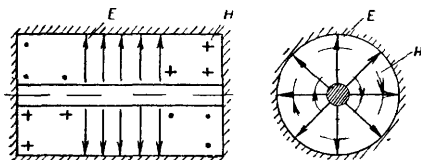


Рис. 7.20. Поле волны TEM_1 в коаксиальном резонаторе

трансцендентного уравнения, пользуясь соотношением (6.26) для волн E или соотношением (6.35) для волн H .

§ 7.8. ДОБРОТНОСТЬ ОБЪЕМНОГО РЕЗОНАТОРА. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Добротность объемного резонатора является важнейшим параметром, при помощи которого удаётся сравнивать между собой различные объёмные резонаторы с потерями по их способности сохранять запасённую энергию в режиме собственных колебаний и по полосе пропускания для режима вынужденных колебаний. Как и в теории обычных колебательных контуров, *добротностью объёмного резонатора называют отношение максимального значения мощности колебаний в резонаторе (§ 7.4) к средней мощности потерь за период*

$$Q = \frac{P_{к макс}}{P_{н ср}} = \frac{\omega W_3}{P_{н ср}}. \quad (7.32)$$

Заменяя частоту через период колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$, выражение для добротности можно записать в виде

$$Q = \frac{2\pi W_3}{P_{н ср} T} = 2\pi \frac{W_3}{W_{нT}}, \quad (7.33)$$

где $W_{нT}$ — энергия потерь за период.

Таким образом, добротность с точностью до множителя определяется *отношением запасённой энергии к энергии потерь за период*.

Принято различать добротность Q_0 *ненагруженного* резонатора и добротность Q_n *нагруженного* резонатора, связанного с какой-либо высокочастотной нагрузкой.

Вначале ограничимся рассмотрением ненагруженных резонаторов. Потери в ненагруженном резонаторе с воздушным заполнением практически определяются только потерями в стенках,

связанными с протеканием поверхностных токов. Средняя мощность потерь ненагруженного резонатора (в первом приближении, см. § 4.10) находится из соотношения

$$P_{ncp} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int j_s^2 R_S dS = \frac{R_S}{2} \oint_S H_{\tau m}^2 dS, \quad (7.34)$$

а максимальное значение запасённой энергии определяется как

$$W_{\Sigma} = W_{\Sigma} + W_M = W_{M \max} = \int_V \frac{\mu H_m^2}{2} dV. \quad (7.35)$$

Отсюда находим выражение для добротности ненагруженного резонатора

$$Q_0 = \frac{\omega W_{\Sigma}}{(P_{ncp})_0} = \frac{\omega \mu}{R_S} \frac{\int_V H_m^2 dV}{\oint_S H_{\tau m}^2 dS}. \quad (7.36)$$

Для получения более удобной расчётной формулы преобразуем отношение $\frac{\omega \mu}{R_S}$, введя удельную проводимость σ и глубину проникновения δ ,

$$\frac{\omega \mu}{R_S} = 2\pi f \mu \sqrt{\frac{\sigma}{\pi f \mu}} = 2 \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{2}{\delta}.$$

Тогда выражение для добротности ненагруженного резонатора принимает вид

$$Q_0 = \frac{2}{\delta} \frac{\int_V H_m^2 dV}{\oint_S H_{\tau m}^2 dS}. \quad (7.37)$$

Иногда пользуются несколько видоизменёнными выражениями для добротности ненагруженного объёмного резонатора. В силу того, что все составляющие магнитного поля находятся в фазе, можно записать:

$$H = H_m \cos(\omega t + \varphi),$$

$$H_{\tau} = H_{\tau m} \cos(\omega t + \varphi).$$

Умножая интегралы в числителе и знаменателе выражения (7.37) на $\cos^2(\omega t + \varphi)$ и учитывая, что у стенок $H_\tau = H$ (так как $H_n = 0$), получим

$$Q_0 = \frac{2}{\delta} \frac{\int_V H^2 dV}{\oint_S H^2 dS}. \quad (7.38)$$

Если ввести средние значения квадрата напряжённости магнитного поля $(H^2)_V$ и $(H^2)_S$, где в первом случае усреднение проведено по объёму, а во втором — по поверхности выражение (7.38) можно переписать так

$$Q_0 = \frac{2}{\delta} \frac{V}{S} \frac{\overline{(H^2)}_V}{\overline{(H^2)}_S}. \quad (7.39)$$

Отсюда видно, что добротность Q_0 тем больше, чем больше отношение объёма резонатора к его поверхности, и зависит, кроме того, от характера распределения магнитного поля по объёму, определяемого отношением $(H^2)_V$ к $(H^2)_S$. Зависимость добротности от отношения объёма к поверхности связана с тем, что запас энергии происходит в объёме, а потери — на поверхности резонатора. Для сплюсненного резонатора, например, отношение объёма к поверхности мало, значит, относительно невелика будет и добротность такого резонатора.

Оценку порядка добротности Q_0 произведём на примере кубического резонатора со стороной a . В этом случае

$$Q_0 = \frac{2}{\delta} \frac{a^3}{6a^2} \frac{\overline{(H^2)}_V}{\overline{(H^2)}_S} = \frac{1}{3} \frac{a}{\delta} \frac{\overline{(H^2)}_V}{\overline{(H^2)}_S}, \quad (7.40)$$

откуда видно, что порядок добротности ненагруженного резонатора определяется отношением его линейного размера к глубине проникновения δ поля в металл. Обычно δ имеет порядок тысячных долей миллиметра, а a — порядок сантиметров, так что порядок Q_0 определяется в среднем десятками тысяч.

Чтобы проиллюстрировать зависимость добротности от закона распределения магнитного поля по объёму, сравним между собой поле TEM_1 в коаксиальном резонаторе и поле H_{011} в цилиндрическом резонаторе (рис. 7.21). В первом случае поле концентрируется у внутреннего проводника, главным образом вблизи торцевых пластин. Во втором — поле также концентрируется в окрестности оси резонатора, но там отсутствует поверхность проводника и, следовательно, нет потерь

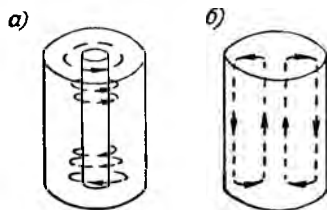


Рис. 7.21. Сравнение законов распределения магнитного поля

энергии за счёт поверхностных токов. При одинаковом отношении объёма к поверхности добротность будет очевидно больше для волны H_{011} .

Следует отметить вообще, что круглые резонаторы при колебаниях H_{01p} обладают особенно высокой добротностью, что привело к использованию их в ряде измерительных приборов. При этом, однако, приходится учитывать возможность возбуждения колебаний E_{11p} , имеющих те же самые собственные частоты, что и колебания H_{01p} ¹⁾.

Перейдём к рассмотрению добротности нагруженного резонатора Q_n , которая определяется как отношение максимальной мощности колебаний $P_{к макс}$ к средней мощности потерь за период с учётом нагрузки $(P_{н ср})_n$. Последнюю можно представить как сумму средних мощностей потерь в стенках резонатора и во внешней нагрузке

$$(P_{н ср})_n = (P_{н ср})_0 + (P_{н ср})_{вн}. \quad (7.41)$$

Поделив обе части равенства (7.41) на $P_{к макс}$, получим

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_0} + \frac{(P_{н ср})_{вн}}{P_{к макс}}.$$

Если ввести понятие *внешней добротности резонатора* $Q_{вн}$ как отношение максимальной мощности колебаний в резонаторе к средней мощности потерь во внешней нагрузке, получим

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн}} \quad (7.42)$$

или

$$Q_n = \frac{Q_0 Q_{вн}}{Q_0 + Q_{вн}}. \quad (7.43)$$

Отсюда следует, что добротность нагруженного объёмного резонатора Q_n меньше добротности ненагруженного Q_0 и внешней добротности $Q_{вн}$. При сильной связи с нагрузкой за счёт больших внешних потерь значение $Q_{вн}$ невелико, поэтому сильно падает и добротность Q_n нагруженного резонатора.

¹⁾ В качестве одной из мер борьбы с колебаниями E_{11p} используется так называемый *бесконтактный поршень* (диск, диаметр которого меньше внутреннего диаметра резонатора), снаружи покрытый поглотителем. Для колебаний типа H_{01p} щель между поршнем и цилиндрической поверхностью не перерезает кольцевых токов и излучения энергии не происходит. Наоборот, в случае колебаний E_{11p} щель перерезает поверхностные токи, энергия излучается к поглотителю, за счёт чего ослабляется амплитуда поля паразитного типа.

§ 7.9. ДОБРОТНОСТЬ КАК ХАРАКТЕРИСТИКА РЕЖИМОВ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРЕ С ПОТЕРЯМИ

Добротность любого резонатора, как и добротность колебательного контура, является мерой его способности сохранять запасённую энергию W_3 в режиме свободных колебаний. В самом деле, потеря энергии за время dt составляет

$$dW_3 = -P_{н\text{ ср}} dt = -\frac{1}{Q} P_{к\text{ макс}} dt = -\frac{1}{Q} \omega_0 W_3 dt,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение для запасённой энергии

$$\frac{dW_3}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} W_3. \quad (7.44)$$

Решение этого уравнения

$$W_3 = W_{30} e^{-\frac{\omega_0}{Q} t} \quad (7.45)$$

характеризует экспоненциальный закон убывания запасённой энергии во времени вследствие потерь. Поскольку амплитуда напряжённости поля пропорциональна корню из запасённой энергии, а $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, где T_0 — период колебаний, получим

$$E_m = E_{m0} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} = E_{m0} e^{-\frac{\pi t}{QT_0}}. \quad (7.46)$$

Как видно из полученного выражения, за время $t = QT_0$ амплитуда напряжённости поля убывает в $e^\pi \approx 23$ раза. Таким образом, *добротность Q определяет число периодов, за которое амплитуда напряжённости поля убывает в $e^\pi \approx 23$ раза*. Чем выше добротность, тем дольше сохраняется энергия при свободных колебаниях в резонаторе.

Свободные колебания так называемых *эхо-резонаторов* широко используются для контроля работы радиолокационных станций. Эхо-резонатор представляет собой объёмный резонатор достаточно высокой добротности, возбуждаемый передатчиком радиолокатора и излучающий ответные колебания к приёмнику. *Длительность звучания*, т. е. длительность процесса свободных колебаний, наблюдаемых на экране до пропадания в шумах, является мерой превышения мощности передатчика над пороговым сигналом приёмника. Чем больше эта длительность, тем большую дальность может обеспечить локатор.

Как и для колебательного контура, добротность является характеристикой не только свободных, но и вынужденных колебаний резонатора.

Поведение произвольной линейной системы в установившемся режиме вынужденных колебаний полностью определяется её поведением в переходном режиме, после того как она получила от источника кратковременную посылку энергии. В режиме вынужденных колебаний добротность определяет относительную ширину резонансной кривой на уровне 0,707

$$\frac{2\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}. \quad (7.47)$$

Уравнение резонансной кривой для какого-либо типа колебаний можно получить, не прибегая к аналогии с контуром. Пусть известно, что единичный импульс тока в штыре или витке, введённом в резонатор, действуя при $t = 0$, создаёт затем колебания $E \approx E_{m0} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t + \psi)$. Если далее возбуждение производится не импульсом тока, а гармонически изменяющимся во времени током $i = I_m \cos \omega t = 1 \cos \omega t$, разобьём кривую тока на ряд импульсов, каждый из которых действует в промежутке времени $s < t < s + ds$. Каждый такой импульс создаёт поле с запаздыванием на s по отношению к единичному, действующему при $t = 0$, и отличающееся по амплитуде в $\cos \omega s ds$ раз. Результирующее поле в установившемся режиме к моменту времени t будет

$$E \approx E_{m0} \int_{-\infty}^t \cos \omega s \cos [\omega_0 (t - s) + \psi] e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t-s)} ds. \quad (7.48)$$

Производя интегрирование и несколько упрощая полученное выражение с учётом того, что в окрестности резонансной частоты $\omega - \omega_0 \ll \omega_0$, получим

$$\begin{aligned} E &\approx \frac{E_{m0}}{2} \frac{(\omega - \omega_0) \sin(\omega t - \psi) + \frac{\omega_0}{2Q} \cos(\omega t - \psi)}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2} = \\ &= \frac{E_{m\text{рез}} \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2}}, \end{aligned}$$

где $E_{m\text{рез}} = Q E_{m0} \omega_0$ и $\varphi = \psi + \arctg \left(2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)$.

Отсюда находим уравнение резонансной кривой

$$\frac{E_m}{E_{m\text{рез}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{f - f_0}{f_0}\right)^2}}, \quad (7.49)$$

из которого непосредственно следует ф-ла (7.47).

§ 7.10. СВЯЗЬ ДОБРОТНОСТИ ВОЛНОВОДНОГО РЕЗОНАТОРА С КОЭФФИЦИЕНТОМ ЗАТУХАНИЯ В ВОЛНОВОДЕ

Если материал стенок ненагруженного волноводного резонатора такой же, что и у волновода одинакового поперечного сечения, между добротностью первого и коэффициентом затухания второго имеется прямая связь. В самом деле, заменяя в общем выражении (7.36) интеграл по замкнутой поверхности суммой интегралов по поверхностям боковых и торцевых стенок, найдём

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{R_S}{\omega\mu} \left[\frac{\int_{S_{бок}} H_{\epsilon m}^2 dS}{\int_V H_m^2 dV} + 2 \frac{\int_{S_{торц}} H_{\epsilon m}^2 dS}{\int_V H_m^2 dV} \right].$$

Заменяя $dS = dS_{бок} = dl dz$, $dV = dS_{nonep} dz$, $H_m^2 = H_{Sm}^2 + H_{zm}^2$ и используя соотношения (7.17), после интегрирования по координате z получим

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{R_S}{\omega\mu} \left[\frac{\oint_C (|G|^2 + |g|^2) dl}{\int_{S_{nonep}} (|G|^2 + |g|^2) dS} + \frac{2 \epsilon_p \oint_C |G|^2 dl}{l \int_{S_{nonep}} (|G|^2 + |g|^2) dS} \right].$$

Переход к модулям связан с тем, что собственные функции выражаются комплексными числами, а величина $\epsilon_p = 1$, если $p=0$, и $\epsilon_p = 2$, если $p = 1, 2, 3, \dots$, введена потому, что интеграл

$$\frac{1}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi p}{l} z dz = \frac{1}{\epsilon_p}$$

равен при этих значениях p соответственно 1 или $\frac{1}{2}$.

В случае волн типа E , когда $|g| = 0$, с учётом (7.5) и (4.91) находим

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{2\beta_E}{\omega\mu} + \frac{2\epsilon_p R_S}{l \omega\mu} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda_E^2} \left[\beta + \frac{R_S \epsilon_p}{\rho_E l} \right].$$

В случае волн типа H необходимо учесть связь между интегралами по площади поперечного сечения от $|g|^2$ и $|G|^2$. Поскольку $\mathbf{G} = -\frac{i\alpha}{k^2} \text{grad } g$, получим

$$\int_{S_{nonep}} |G|^2 dS = \frac{\alpha^2}{k^2} \int_{S_{nonep}} |g|^2 dS.$$

Тогда с учётом (7.5), (4.91), (2.54), (3.64) и (3.47) будем иметь

$$\frac{1}{Q_0} = \left[\frac{2\beta_{FH}}{\omega\mu} + \frac{2\varepsilon_p}{l} \frac{R_S}{\omega\mu} \right] \frac{1}{1 + \frac{k^2}{\alpha^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda_g} \left[\beta + \frac{R_S \varepsilon_p}{\rho_H l} \right].$$

Таким образом, для обоих типов волн E и H можно написать

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda_g} \left[\beta + \frac{R_S \varepsilon_p}{\rho l} \right], \quad (7.50)$$

где $\rho = \rho_H$ или $\rho = \rho_E$ в зависимости от типа волны. Полученное соотношение даёт возможность найти добротность резонатора для произвольного типа волны по известному коэффициенту затухания соответствующей волны в волноводе.

В качестве первого примера найдём добротность для колебаний E_{010} в круглом резонаторе. Используя выражения (7.50) и (5.43) и учитывая, что в данном случае $\rho = \rho_E = \rho_0 \frac{\lambda}{\lambda_g}$, находим

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda_g} \left(\frac{R_S}{a\rho_0} \frac{\lambda_g}{\lambda} + \frac{R_S}{l\rho_0} \frac{\lambda_g}{\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\pi a} \frac{R_S}{\rho_0} \left(1 + \frac{a}{l} \right). \quad (7.51)$$

В качестве второго примера найдём добротность для колебаний TEM_p в закороченном с двух концов коаксиальном резонаторе. Используя выражения (7.50) и (6.48) и учитывая, что в данном случае $\lambda_g = \lambda$, $l = p \frac{\lambda}{2}$, $a\rho = \rho_0$, находим

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{R_S}{\rho_0} \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\ln \frac{a}{b}} + \frac{4}{p} \right) \quad (7.52)$$

§ 7.11. НЕВОЛНОВОДНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Примером неволноводного резонатора является тороидальный резонатор (рис. 7.22), предложенный впервые советским учёным М. С. Нейманом в 1938 г. Подобного типа резонаторы широко используются в электронных приборах свч. Малое расстояние между стенками резонатора (которые являются продолжением электродов электронного прибора) даёт возможность *уменьшить отношение времени пролёта электронов через резонатор к периоду колебаний*. Это позволяет обеспечить эффективное их

¹⁾ То обстоятельство, что при $\rho = 0$ значение $\lambda_g \rightarrow \infty$, не имеет значения, так как неопределённость сразу раскрывается за счёт сокращения на λ_g .

торможение переменным полем (а значит, и отдачу энергии переменному полю) в полупериод, когда поле является тормозящим, без ускорения в другой полупериод. В настоящее время разработан ряд разновидностей тороидального резонатора, наибольшее распространение из которых нашли тороидальные резонаторы прямоугольной формы сечения (рис. 7.23).

Можно показать, что для неволноводного резонатора, как и для волноводного, существует ряд типов колебаний, характеризующихся различными пространственными распределениями поля и соответствующими им собственными частотами.

Главной особенностью основного вида колебаний в тороидальном резонаторе является выраженное более резко, чем в других резонаторах, пространственное разделение в них электрического и магнитного полей. Это обстоятельство даёт право подойти к ана-

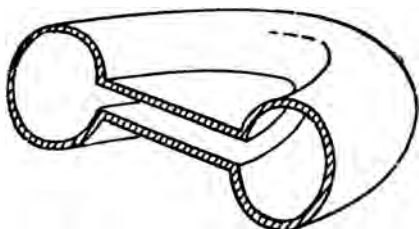


Рис 7.22. Тороидальный резонатор

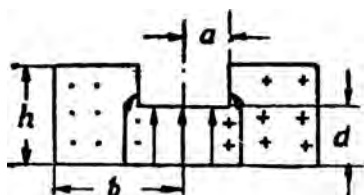


Рис. 7.23. Практическая конфигурация тороидального резонатора

лизу такого резонатора, как к соединению сосредоточенных ёмкости и индуктивности, и найти основную собственную частоту по известной из теории обычных контуров формуле

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}. \quad (7.53)$$

Частота ω_0 соответствует простейшему распределению поля и является наинизшей.

За эквивалентную ёмкость C_3 принимают ёмкость между сближенными торцевыми стенками резонатора, которая рассчитывается по формуле плоского конденсатора

$$C_3 \equiv \frac{\epsilon_0 S}{d} = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{d}. \quad (7.54)$$

Нахождение эквивалентной индуктивности оказывается несколько более сложной задачей. В основу расчёта кладётся известное выражение

$$L = \frac{\Phi}{i}, \quad (7.55)$$

¹⁾ Для уменьшения погрешности вводится поправка на замыкание части линий электрического поля на боковые стенки (см. В. Ф. Коваленко. Введение в электронику сверхвысоких частот, «Советское радио», 1955, стр. 13).

где Φ — поток вектора магнитной индукции, а i — суммарный ток проводимости боковых стенок, замыкающийся током смещения. Поток Φ определяется как произведение средней магнитной индукции $B_{cp} = \mu_0 H_{cp}$ на площадь сечения, через которое проходит магнитный поток,

$$\Phi = \mu_0 H_{cp} (b - a) h, \quad (7.56)$$

где за величину напряжённости магнитного поля H_{cp} можно принять значение этой напряжённости на средней окружности тороида радиуса $(b + a)/2$. Используя закон полного тока

$$\int \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_{cp} 2\pi \frac{b + a}{2} = i,$$

значение H_{cp} можно выразить через ток i . Тогда в силу соотношений (7.55) и (7.56) получим

$$L = L_s = \frac{\Phi}{i} = \frac{1}{i} \mu_0 \frac{i}{\pi(a + b)} (b - a) h = \frac{\mu_0 (b - a) h}{\pi (b + a)}. \quad (7.57)$$

Пользуясь (7.53) и (7.54), можно найти собственную частоту ω_0 . Ей соответствует длина волны в свободном пространстве

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = a \sqrt{\frac{(b - a) h}{(b + a) d}}. \quad (7.58)$$

Настройка тороидальных резонаторов на нужную частоту производится либо путём изменения d , что влияет на величину C_s ,

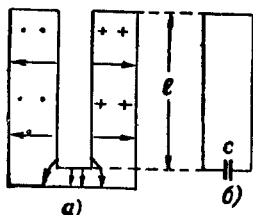


Рис. 7.24. Резонатор типа закороченной коаксиальной линии, нагруженной на ёмкость

либо путём ввинчивания в полость металлических стержней, что влияет на величину L_s .

В ряде случаев оказывается удобным применение тороидальных резонаторов *удлинённой* конструкции (рис. 7.24а). Резонатор такого типа можно рассматривать как соединение ёмкости с закороченной коаксиальной линией. Для такого резонатора можно составить эквивалентную схему, изображённую на рис. 7.24б, и собственную частоту ω_0 можно найти из условий резонанса короткозамкнутой линии

с входным сопротивлением $Z_{ex} = i \rho_a \operatorname{tg} \alpha l$, нагруженной на ёмкостное сопротивление $1/i \omega C_0$,

$$i \rho_a \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l + \frac{1}{i \omega C_0} = 0. \quad (7.59)$$

Решая трансцендентное уравнение, находят собственные частоты резонатора. Если ёмкость C_0 мала и $1/\omega C_0$ много больше ρ_a , то $\alpha l = \frac{\omega}{c} l \approx \frac{\pi}{2}$. Тогда при резонансе длина линии близка к нечётному числу четвертей длины волны.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ И РЕЗОНАТОРОВ

§ 8.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛНОВОДА ЗАДАНЫМИ СТОРОННИМИ ТОКАМИ И ПОЛЯМИ В ЩЕЛЯХ

При изучении различных видов волн в волноводах и резонаторах затрагивались и вопросы, связанные с возбуждением этих волн. Однако эти вопросы рассматривались лишь описательно, с

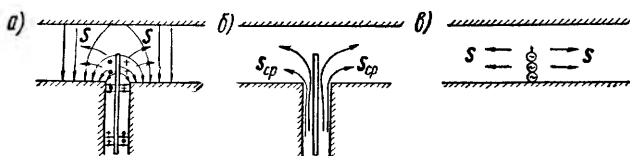


Рис. 8.1. Возбуждение волновода штырем (через коаксиальный кабель) и сторонними токами

качественной точки зрения (за исключением случая возбуждения системы параллельных плоскостей). Между тем, в ряде случаев необходимо установить *количественные* соотношения, описывающие работу возбуждающих устройств. Теория возбуждения волноводов даёт, кроме того, основу для расчёта неоднородностей в волноводах, рассматриваемых в гл. 9, 10, 11: волноводных нагрузок и разветвлений, замедляющих систем с электронными пучками, а также имеет большое значение при выяснении условий согласования линий передачи электромагнитной энергии в целом.

Задача о возбуждении волноводов в своей общей постановке принадлежит к числу сравнительно сложных задач. Чтобы пояснить её, обратимся к рис. 8.1. На рис. 8.1а изображена картина поля для некоторого момента времени в волноводе и коаксиальном кабеле в окрестности возбуждающего штыря. Показаны линии электрического поля, сечения линий магнитного поля и направления потоков энергии, характеризуемые вектором $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$. На рис. 8.1б изображены линии вектора $\mathbf{S}_{cp}$, представляющего

собой значение вектора S , усреднённое по времени. Изображённые линии потока энергии характеризуют штырь как элемент системы, направляющей распространение энергии. Как видно из рисунка, электромагнитная энергия, поступая по коаксиальному кабелю через отверстие в стенке, вводится в волновод и, направляемая штырём, распространяется по нему. По штырю течёт ток и на нём наводятся заряды.

Интенсивность возбуждаемого поля зависит от того, как нагружен волновод и какая мощность поступает от генератора. Для характеристики последней наиболее естественно было бы задать комплексную амплитуду тока или напряжения в сечении кабеля, удалённом от штыря настолько, что поле в этом сечении можно считать полем волны *ТЕМ*. Однако такая постановка задачи включает выяснение закона распределения тока, текущего по штырю, что значительно затрудняет решение.

Поэтому обычно задаются распределением тока по штырю, т. е. решают более простую задачу расчёта поля в волноводе, возбуждаемом заданным (сторонним) током. Закон распределения тока подбирается, исходя из некоторых физических соображений, как для линейной антенны, но в целом является достаточно произвольным. Предполагается, что ток введён в волновод, не нарушая целости его проводящих стенок (рис. 8.16), и вызван распределёнными вдоль провода сторонними эдс. По заданному закону распределения тока находится поле в волноводе и *входное сопротивление* возбуждающего волновод штыря, определяемое по формуле

$$Z_{\text{вх}} = \frac{2\dot{P}}{I_{m0}^2}, \quad (8.1)$$

где $\dot{P}$ — найденная из расчёта полная мощность, расходуемая на возбуждение поля (т. е. сумма подводимых к штырю активной и реактивной мощностей), а I_{m0} — амплитуда тока у основания штыря.

Для измерения входного сопротивления штыря можно пользоваться коаксиальной измерительной линией¹⁾. Задача нахождения поля в волноводе и входного сопротивления штыря сходна с задачей расчёта поля и входного сопротивления антенны в свободном пространстве по заданному распределению тока. В обоих случаях сама постановка задачи является *приближённой* и связана с тем, что теоретическое решение задачи о распределении тока известно лишь для некоторых частных случаев. Для тонких проволочных антенн решение задачи о распределении тока по за-

¹⁾ Строго говоря, при помощи линии измеряется сопротивление $Z_{\text{вх1}} = 2\dot{P}_{\text{вх1}}/I_{m0}^2$, где $\dot{P}_{\text{вх1}}$ — полная мощность возбуждения с учётом реактивной мощности, расходуемой на поддержание высших типов волн в кабеле в окрестности возбуждающего штыря.

данному распределению сторонних эдс было дано М. А. Леонтовичем и М. Л. Левиным, причём для резонансного случая при сосредоточенной эдс оказалось, что распределение тока близко к синусоидальному. Это решение было распространено на волноводы А. И. Ахизером и Г. Я. Любарским, но для единственного случая круглого волновода, возбуждаемого продольным осевым током.

Подобно задаче о возбуждении сторонним током, ставится задача о возбуждении сторонним электрическим полем в щели. Решение этой задачи является основой исследования излучающей щели как волноводной нагрузки. Рисунок 8.2 иллюстрирует слу-

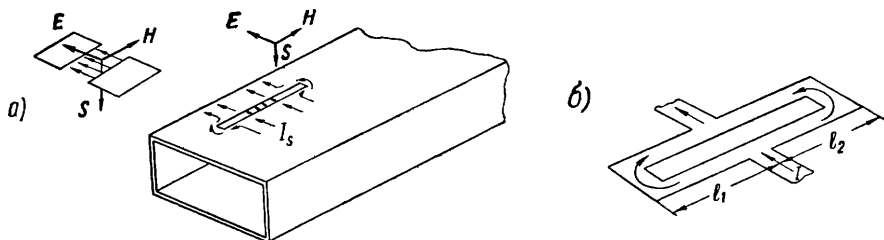


Рис. 8.2. Возбуждение волновода падающей на щель электромагнитной волной.

чай, когда возникает необходимость в решении задачи о возбуждении через щель. На волновод с прорезанной в его стенке узкой щелью падает электромагнитная волна. Отражаясь от проводящей стенки волновода, волна наводит в ней поверхностные токи. Эти токи перерезаются щелью, частично огибая её и частично замыкаясь токами смещения. На краях щели накапливаются заряды, между которыми создаётся электрическое поле. Вектор $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ в щели в среднем направлен внутрь волновода, так что в волновод поступает энергия, вызывая распространение электромагнитных волн. Волновод со щелью представляет таким образом приёмную антенну. С целью упрощения анализа обычно задаются распределением электрического поля в щели. Решая задачу о возбуждении волновода щелью, находят *входную проводимость* щели как коэффициент, связывающий полную мощность, вводимую в волновод, с квадратом амплитуды напряжения в центре щели

$$Y_{ex} = \frac{2\dot{P}}{U_{m0}^2}. \quad (8.2)$$

Эта проводимость имеет большое значение в теории щелевых антенн¹⁾. Некоторые соображения о законе распределения тока

¹⁾ Хотя проводимость Y_{ex} и представляет чисто расчётную величину, она может быть приближённо измерена при помощи узкой симметричной двухпроводной линии, подводящей энергию к центру щели.

вдоль щели можно вывести из рис. 8.2б, где изображена сходная со щелью закороченная ленточная линия, к которой подведён сосредоточенный ток. По мере того, как длина $l_1 + l_2$ приближается к $\lambda/2$, напряжение в пучности возрастает, а распределение тока приближается к синусоидальному. Резонансное значение длины щели близко к $\lambda/2$, а не $\lambda_g/2$, поскольку длина волны в ленточной линии примерно такая же, как и в свободном пространстве.

Сторонние токи и поля в щелях называют *сторонними источниками*.

§ 8.2. ЗАПИСЬ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВОЛНОВОДА С ИСТОЧНИКАМИ

Запись выражений для составляющих векторов электромагнитного поля была обобщена в § 7.2 так, чтобы быть пригодной для произвольного участка волновода без источников. Выясним,

нельзя ли несколько видоизменить указанные соотношения так, чтобы они были пригодны также и для участков волновода с источниками. С этой целью рассмотрим случай (рис. 8.3), когда источники имеются только на участках dz_1 и dz_2 некоторого волновода.

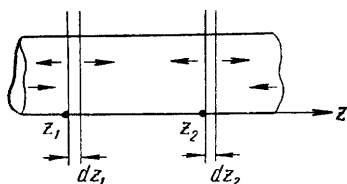


Рис. 8.3 Пояснение принципа суперпозиции для распределённых вдоль волновода источников

По принципу суперпозиции результирующее поле будет равно сумме полей от источников на участках dz_1 и dz_2 . При этом поле от источников на участке dz_1 рассчиты-

вается в предположении, что равны нулю источники на участке dz_2 (отсутствие сторонних токов, равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля на стенках волновода). Поле же от источников на участке dz_2 рассчитывается в предположении, что равны нулю источники на участке dz_1 .

Положим, что волновод согласован с двух сторон и что источники в сечениях dz_1 и dz_2 создают симметричные волны поперечного электрического поля в каждом из направлений распространения. Учитывая, что каждая из таких волн характеризуется векторной функцией $F(x, y)$, для составляющей поля некоторого типа волн можно написать

$$E_s = (a_1 e^{-\gamma|z-z_1|} + a_2 e^{-\gamma|z-z_2|}) F(x, y) e^{i\omega t}.$$

При составлении написанного выражения учтены множители $e^{-\gamma|z-z_1|}$ и $e^{-\gamma|z-z_2|}$, представляющие собой для распространяющихся типов волн множители запаздывания, причём запаздывание определяется абсолютным значением расстояния до заданного сечения z от соответствующего сечения источника z_1 или z_2 .

Несколько короче можно записать

$$E_S = \dot{e}(z) F(x, y) e^{i\omega t},$$

где функция $\dot{e}(z)$ характеризует распределение составляющей поля E_S по координате z . Функция $\dot{e}(z)$ в рассматриваемом случае имеет разрывы производной при переходе через каждый дискретный источник, пропорциональные амплитудным множителям a_1 и a_2 , поскольку функции $|z - z_1|$ и $|z - z_2|$ имеют разрывы производной в точках z_1 и z_2 соответственно.

Запись для составляющей E_S через функции $\dot{e}(z)$ и $F(x, y)$ сохраняет свой смысл и в случае, когда источники распределены непрерывно по закону какой-либо дифференцируемой функции. Поскольку при этом «разрывы» на каждом бесконечно малом участке становятся бесконечно малыми, можно утверждать, что функция $\dot{e}(z)$ имеет непрерывную производную.

Введение функции $\dot{e}(z)$ оказывается целесообразным и в тех случаях, когда имеются волны, отражённые от концов, поскольку распределение составляющей E_S для отражённых волн описывается той же векторной функцией $F(x, y)$, что и для прямых. При этом конкретный вид функции $\dot{e}(z)$ меняется. Например, для условий (рис. 8.3) с учётом отражённых волн выражение для функции $\dot{e}(z)$ может быть записано так

$$\dot{e}(z) = a_1 e^{-\gamma|z - z_1|} + a_2 e^{-\gamma|z - z_2|} + b_1 e^{-\gamma z} + b e^{\gamma z}.$$

Таким образом, функция $\dot{e}(z)$ позволяет охарактеризовать распределение составляющей E_S для каждого типа волны. Конкретный вид функции $\dot{e}(z)$ определяется, как следует из изложенного выше: 1) законом распределения источников вдоль волновода; 2) условиями отражения на его концах; 3) параметрами соответствующего типа волны; 4) свойствами источников (синфазность или противофазность возбуждаемых волн для данной составляющей поля).

При наложении ряда типов волн в волноводе необходимо просуммировать подобные решения для каждого из них. Распространяя проведённое рассуждение на составляющие поля H_S , E_z и H_z , получим:

$$\left. \begin{aligned} E_S &= \sum_v \dot{e}_v(z) F_v(x, y) e^{i\omega t} \\ H_S &= \sum_v \dot{h}_v(z) G_v(x, y) e^{i\omega t} \\ E_z &= \sum_v \dot{p}_v(z) f_v(x, y) e^{i\omega t} \\ H_z &= \sum_v \dot{q}_v(z) g_v(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Здесь $F_v(x, y)$, $G_v(x, y)$, $f_v(x, y)$, $g_v(x, y)$ — собственные функции, характеризующие распределение составляющих поля по координатам поперечного сечения для волн каждого типа, примеры которых были даны в табл. 7.1; $\dot{e}_v(z)$, $\dot{h}_v(z)$, $\dot{p}_v(z)$, $\dot{q}_v(z)$ — функции распределения по координате z , которые будем называть скалярными комплексными амплитудами.

Вместо скалярных комплексных амплитуд можно пользоваться также функциями распределения мгновенных значений:

$$e_v(z, t) = \dot{e}_v(z) e^{i\omega t},$$

$$h_v(z, t) = \dot{h}_v(z) e^{i\omega t},$$

$$p_v(z, t) = \dot{p}_v(z) e^{i\omega t},$$

$$q_v(z, t) = \dot{q}_v(z) e^{i\omega t}.$$

Соотношения (8.3) могут быть переписаны тогда в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_s &= \sum_v e_v(z, t) F_v(x, y) \\ H_s &= \sum_v h_v(z, t) G_v(x, y) \\ E_z &= \sum_v p_v(z, t) f_v(x, y) \\ H_z &= \sum_v q_v(z, t) g_v(x, y) \end{aligned} \right\}. \quad (8.4)$$

При написании соотношений (8.3) и (8.4) каждому типу волны присвоен свой порядковый номер v . Подобная нумерация может быть проведена в порядке возрастания критических частот. Например, для прямоугольного волновода, диаграмма типов волн которого представлена на рис. 4.18, нумерацию можно произвести, полагая $v = 1$ для волны типа H_{01} , $v = 2$ — для H_{02} , $v = 3$ — для H_{10} , $v = 4$ — для H_{11} , $v = 5$ — для E_{11} , $v = 6$ — для H_{12} , $v = 7$ — для E_{12} , $v = 8$ — для H_{03} и т. д. Аналогично можно перенумеровать различные типы волн для круглого волновода (диаграмма типов волн, рис. 5.29). Собственные функции различных типов волн в прямоугольном и круглом волноводах с точностью до коэффициента определяются по данным табл. 7.1. Условимся, что этот коэффициент выбирается так, чтобы функции $F_v(x, y)$ и $G_v(x, y)$ были вещественны.

Скалярные комплексные амплитуды особенно просто выражаются для участка волновода без источников. Сопоставляя выраже-

ния (8.3) и (7.6), (7.10), (7.13). для ν -й волны с постоянной распространения γ_ν в этом частном случае можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_\nu(z) &= A e^{-\gamma_\nu z} + B e^{\gamma_\nu z} \\ \dot{h}_\nu(z) &= \frac{1}{\rho_\nu} (A e^{-\gamma_\nu z} - B e^{\gamma_\nu z}) \end{aligned} \right\}, \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_\nu(z) &= A e^{-\gamma_\nu z} - B e^{\gamma_\nu z} \\ \dot{q}_\nu(z) &= \frac{1}{\rho_\nu} (A e^{-\gamma_\nu z} + B e^{\gamma_\nu z}) \end{aligned} \right\}. \quad (8.6)$$

Выражения (8.5) аналогичны соответствующим выражениям для напряжения и тока в длинной линии. Отысканию скалярных комплексных амплитуд для волновода с источниками посвящён ряд последующих параграфов данной главы.

§ 8.3. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ФОРМУЛА ПЕРЕНОСИМОЙ МОЩНОСТИ. НОРМИРОВКА

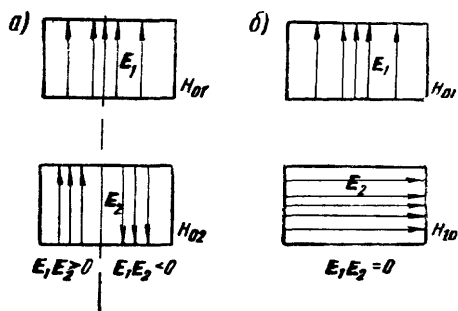
Как и система тригонометрических функций (§ 2.13), система собственных функций волновода с идеально проводящими стенками является ортогональной, т. е. интегралы по площади поперечного сечения от скалярного произведения двух функций с неравными индексами равны нулю (при $n \neq \nu$):

$$\left. \begin{aligned} \int F_n(x, y) F_\nu(x, y) dS &= 0 \\ \int G_n(x, y) G_\nu(x, y) dS &= 0 \\ \int f_n(x, y) f_\nu(x, y) dS &= 0 \\ \int g_n(x, y) g_\nu(x, y) dS &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (8.7)$$

Доказательство ортогональности основывается на свойствах решений скалярных мембранных уравнений с нулевыми граничными условиями и градиентов этих решений (см. приложение 8.1). Здесь мы только ограничимся пояснением понятия ортогональности на двух простейших примерах.

Пример 1. Убедимся в ортогональности функций распределения поперечных электрических полей волн H_{01} и H_{02} в прямоугольном волноводе. На рис. 8.4а показано распределение полей этих волн при помощи векторных линий. Как видно из рисунка, скалярное произведение $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ векторов электрического поля рассматриваемых волн положительно по одну и отрицательно по другую сторону от оси симметрии поперечного сечения. Интеграл

от скалярного произведения по площади поперечного сечения равен поэтому нулю. Ортогональность векторных функций обусловлена в данном случае свойствами синусоидальных кривых распределения, т. е. является следствием ортогональности тригонометрических функций.



Пример 2. Убедимся в ортогональности функций распределения поперечных электрических полей волн H_{01} и H_{10} в прямоугольном волноводе (рис. 8.4б). В отличие от предыдущего случая, ни одна из кривых распределения не меняет знака вдоль сечения, но скалярное произведение векторов поля

Рис. 8.4 Пояснение ортогональности полей различных видов колебаний в прямоугольном волноводе

различных волн равно нулю в пределах всего сечения из-за того, что эти векторы взаимно-перпендикулярны. Таким образом, ортогональность [соотношения (8.7)] обусловлена в данном случае геометрической ортогональностью векторов электрического поля волн H_{01} и H_{10} .

С понятием ортогональности тесно связан вопрос о переносе энергии различными видами колебаний. Рассчитаем полную мощность, переносимую через поперечное сечение волновода, т. е. сумму активной и реактивной мощностей. Согласно теореме Умова — Пойнтинга в комплексной форме, полная мощность

$$\dot{P} = P_a + iP_r = \frac{1}{2} \int_S [\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}^*] z dS,$$

где $\dot{\mathbf{E}}$ — комплексная амплитуда вектора электрического поля, $\mathbf{H}^*$ — сопряжённое значение комплексной амплитуды вектора магнитного поля.

Поскольку перенос энергии вдоль оси z определяется поперечными компонентами поля, то

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \int_S [\dot{\mathbf{E}}_S \mathbf{H}_S^*] z dS. \quad (8.8)$$

Для фиксированного сечения $z = \text{const}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_S &= \sum_n \dot{e}_n(z) \mathbf{F}_n(x, y) \\ \mathbf{H}_S^* &= \sum_\nu \dot{h}_\nu^*(z) \mathbf{G}_\nu(x, y) \end{aligned} \right\}. \quad (8.9)$$

где n и ν — порядковые номера различных видов волн.

Подставляя выражения (8.9) в ф-лу (8.8), получим

$$\dot{P} = \sum_{n, \nu} \frac{1}{2} \dot{e}_n(z) \dot{h}_\nu^*(z) \int_S [F_n(x, y) G_\nu(x, y)] z dS,$$

где суммирование производится по всем возможным значениям n и ν . Преобразуя подынтегральное выражение и используя при этом ф-лу (7.15), найдём

$$[F_n G_\nu]_z = [F_n G_\nu] \quad z^0 = F_n [G_\nu z^0] = F_n F_\nu.$$

Следовательно,

$$\dot{P} = \sum_{n, \nu} \frac{1}{2} \dot{e}_n \dot{h}_\nu^* \int_S F_n F_\nu dS,$$

где в силу ортогональности векторных функций все слагаемые, для которых $n \neq \nu$, обращаются в нуль. Остаются только члены, для которых $n = \nu$ и, таким образом,

$$\dot{P} = \sum_\nu \frac{1}{2} \dot{e}_\nu \dot{h}_\nu^* \int_S F_\nu^2 dS. \quad (8.10)$$

Это значит, что *перенос энергии через поперечное сечение производится каждым типом волны независимо от другого типа*, что является в данном случае физическим эквивалентом математического понятия ортогональности.

Выражение (8.10) можно ещё упростить, если произвольный коэффициент для каждой из собственных функций [см., например, соотношения (7.3)] подобрать таким образом, чтобы

$$\int_S F_\nu^2 dS = 1 \quad (8.11)$$

(или, в общем случае, не единице, а какой-либо константе).

Подбор коэффициентов называется *нормировкой* собственных функций¹⁾, а соотношение (8.11) определяет нормировку функций F_ν к единице.

Выражение (8.10) для передаваемой мощности при использовании нормированных таким образом функций имеет вид

$$\dot{P} = \sum_\nu \frac{1}{2} \dot{e}_\nu \dot{h}_\nu^* = \sum_\nu \dot{P}_\nu. \quad (8.12)$$

Это значит, что переносимая полная мощность определяется для каждого вида колебаний через скалярные амплитуды поперечных составляющих поля по тому же закону

$$\dot{P}_\nu = \frac{1}{2} \dot{e}_\nu \dot{h}_\nu^*, \quad (8.13)$$

¹⁾ Нормировку можно произвести, в частности, и так, чтобы коэффициент e выражал напряжение, а коэффициент h^* — суммарный продольный ток.

по которому мощность, передаваемая по линии, определяется через комплексные амплитуды напряжения и тока.

Примеры нормировки функций приводятся ниже.

Пример 1. Из условия нормировки (8.10) найти числовой коэффициент C для собственных функций (7.3) волны H_{01} в прямоугольном волноводе. Полагая

$$\int F^2 dS = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b C^2 \sin^2 \frac{\pi}{b} y dx dy = 1,$$

находим

$$C = \sqrt{\frac{2}{ab}}. \quad (8.14)$$

Выкладки, необходимые для нормировки функций, в ряде случаев упрощаются, если использовать соотношения (§ 7.2):

для волн типа E

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad } f \\ \mathbf{G} &= -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad } g \end{aligned} \right\} \quad \text{для волн типа } H \quad (8.15)$$

и учесть, что для любого решения ψ мембранного уравнения, в том числе и для скалярных функций f и g ,

$$\int \text{grad}^2 \psi dS = k^2 \int \psi^2 dS.$$

Это соотношение непосредственно вытекает из (3.58), если положить $\varphi = \psi^*$,

$$\int f^2 dS = \frac{1}{k^2} \int \text{grad}^2 f dS = \frac{k^2}{\gamma^2} \int \mathbf{F}^2 dS = \frac{k^2}{\gamma^2}. \quad (8.16)$$

Полученное соотношение показывает, что нормировка поперечной функции к единице эквивалентна нормировке продольной функции к дроби k^2/γ^2 .

Пример 2. Из условия нормировки найти коэффициенты D для собственных функций волн E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе (табл. 7.1).

Для волн типа H

$$D^2 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \cos^2 \frac{m\pi}{a} x \cos^2 \frac{n\pi}{b} y dx dy = D^2 ab \delta_m \delta_n = \frac{k^2}{\gamma^2},$$

где $\delta_m = 1$, если $m = 0$, и $\delta_m = 1/2$, если $m \geq 1$ (точно так же определяется функция δ_n).

Тогда

$$D = \frac{k}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{ab \delta_m \delta_n}}. \quad (8.17)$$

В частности, для волны H_{01} (как и вообще для волн H_{0n}) $\delta_m = 1$, $\delta_n = 1/2$ и

$$C = \frac{D \gamma}{k^2} \frac{n \pi}{b} = \frac{D \gamma}{k} = \sqrt{\frac{2}{ab}}. \quad (8.18)$$

Для волн типа E :

$$D^2 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \sin^2 \frac{m \pi}{a} x \sin^2 \frac{n \pi}{b} y dx dy = D^2 \frac{ab}{4} = \frac{k^2}{\gamma^2}$$

и

$$D = \frac{k}{\gamma} \frac{2}{\sqrt{ab}}. \quad (8.19)$$

Пример 3. Из условия нормировки найти коэффициенты D для собственных функций волн E_{mn} и H_{mn} в круглом волноводе (табл. 7.1).

Для волн обоих типов

$$D^2 \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} J_m^2(kr) \cos^2 m \varphi r dr d\varphi = \frac{k^2}{\gamma^2}.$$

С учётом соотношений (5.37) и (5.38) имеем

$$2 \pi \delta_m D^2 \left[\frac{a^2}{2} J_m'^2(ka) + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) J_m^2(ka) \right] = \frac{k^2}{\gamma^2},$$

где $\delta_m = 1$, если $m = 0$, и $\delta_m = 1/2$, если $m \geq 1$.

Для волн типа E , когда $J_m(ka) = 0$ и $ka = u_{mn}$, имеем

$$D = \frac{k}{\gamma} \frac{1}{a \sqrt{\pi \delta_m} J_m'(u_{mn})}. \quad (8.20)$$

Для волн типа H , когда $J_m'(ka) = 0$ и $ka = u'_{mn}$, найдём

$$D = \frac{k}{\gamma} \frac{1}{a \sqrt{\pi \delta_m} J_m(ka) \sqrt{1 - \frac{m^2}{u_{mn}^2}}}. \quad (8.21)$$

§ 8.4. ЛЕММА ЛОРЕНЦА

При расчёте электромагнитных полей часто пользуются леммой Лоренца, представляющей собой обобщённую математическую формулировку принципа взаимности. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векто-

ры электромагнитного поля в диэлектрике, связанного со сторонними токами плотностью $\mathbf{j}$, а $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H}_1$ — векторы независимого электромагнитного поля в той же диэлектрической среде, связанного со сторонними токами плотностью $\mathbf{j}_1$. Тогда для стационарного режима можно написать:

$$\left. \begin{aligned} a) \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega\mu \mathbf{H}, & \text{в)} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 &= -i\omega\mu \mathbf{H}_1 \\ б) \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}, & \text{з)} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 &= i\omega\epsilon \mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Умножая векторно слева уравнение (в) на $\mathbf{H}$, уравнение (б) — на $\mathbf{E}_1$, уравнение (а) — на $\mathbf{H}_1$, уравнение (з) — на $\mathbf{E}$ и суммируя почленно полученные равенства, находим

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H}_1 \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \mathbf{j}_1 \mathbf{E} - \mathbf{j} \mathbf{E}_1.$$

Используя равенство

$$\operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

получим

$$\operatorname{div} \{[\mathbf{E}_1 \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \mathbf{H}_1]\} = \mathbf{j}_1 \mathbf{E} - \mathbf{j} \mathbf{E}_1. \quad (8.23)$$

Это и есть *дифференциальная форма леммы Лоренца*.

Интегрируя по произвольному объёму и используя теорему Гаусса—Остроградского, получим

$$\oint_S \{[\mathbf{E}_1 \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \mathbf{H}_1]\} dS = \int_V (\mathbf{j}_1 \mathbf{E} - \mathbf{j} \mathbf{E}_1) dV. \quad (8.24)$$

Полученная *интегральная форма леммы Лоренца* устанавливает связь между различными решениями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, и $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ уравнений Максвелла, взятыми в пределах одного и того же объёма V при одинаковых параметрах среды. Лемма Лоренца использовалась Л. И. Мандельштамом и М. П. Свешниковой при доказательстве электродинамической теоремы взаимности. Для расчёта полей в волноводах она впервые была применена Я. Н. Фельдом и в несколько иной форме М. Б. Законом.

Полагая

$$\mathbf{E} = \dot{\mathbf{E}} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \dot{\mathbf{H}} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{E}_1 = \dot{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H}_1 = \dot{\mathbf{H}}_1 e^{i\omega t},$$

где $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ — комплексные амплитуды векторов, можно также написать

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}] - [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_1]\} d\mathbf{S} = \int_V (\mathbf{j}_1 \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{j} \dot{\mathbf{E}}_1) dV. \quad (8.25)$$

Можно было бы не обращаться к лемме Лоренца, а непосредственно оперировать с уравнениями Максвелла. Таким путём задача решалась Г. В. Кисунко.

§ 8.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ВДОЛЬ ВОЛНОВОДА С ИСТОЧНИКАМИ

Используя свойство ортогональности, найдём закономерности распределения составляющих поля вдоль волновода с источниками и, в частности, выведем дифференциальные уравнения для функций $e_\nu(z)$ и $h_\nu(z)$, соответствующих ν -му типу волны. С этой целью применим лемму Лоренца (8.25) к объёму V волновода в виде слоя (рис. 8.5), ограниченного боковыми стенками и двумя поперечными плоскостями z и $z + \Delta z$. Пусть $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ — векторные комплексные амплитуды искомого поля при условии, что в общем случае в объёме V имеются источники, а $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ — векторные комплексные амплитуды вспомогательного поля ν -го типа волны при условии, что источники в объёме V отсутствуют (в частности, $\mathbf{j}_1 = 0$).

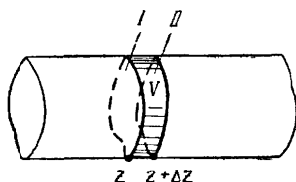


Рис. 8.5. Применение леммы Лоренца к слою между двумя поперечными сечениями волновода

Поверхностный интеграл в лемме Лоренца можно представить как сумму трёх поверхностных интегралов: интегралов по поперечным сечениям I и II и интеграла по боковой поверхности слоя

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_I \mathbf{A} d\mathbf{S} + \int_{II} \mathbf{A} d\mathbf{S} + \int_{S_{бок}} \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

Поскольку в рассматриваемых интегралах векторы $d\mathbf{S}$ ориентированы по внешним нормальям, то, вводя единичные векторы — продольный орт $\mathbf{z}^0$ и орт внутренней нормали $\mathbf{n}$, предыдущее равенство запишем так

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = - \int_I \mathbf{A} \mathbf{z}^0 dS + \int_{II} \mathbf{A} \mathbf{z}^0 dS - \int_{S_{бок}} \mathbf{A} \mathbf{n} dS.$$

Интеграл по боковой поверхности можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_{S_{бок}} \mathbf{A} \mathbf{n} dS &= \int_{S_{бок}} \{ [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}] - [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_1] \} \mathbf{n} dS = \\ &= \int_{S_{бок}} \{ [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}_1] \dot{\mathbf{H}} - [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}] \dot{\mathbf{H}}_1 \} dS. \end{aligned}$$

Для поля $\dot{\mathbf{E}}_1$, представляющего собой поле в волноводе без источников, справедливо граничное условие $[\mathbf{n} \mathbf{E}_1] = 0$. Поэтому

$$\int_{S_{бок}} \mathbf{A} \mathbf{n} dS = - \int_{S_{бок}} [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}] \dot{\mathbf{H}}_1 dS.$$

Обозначая интеграл по поперечному сечению $\mathbf{z}$

$$\int_{S_{попер}} \mathbf{A} \mathbf{z}^0 dS = \int_{S_{попер}} \{ [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}] - [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_1] \} \mathbf{z}^0 dS = Q(\mathbf{z}), \quad (8.26)$$

соотношение (8.25) представим в виде

$$Q(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}) - Q(\mathbf{z}) = - \int_V \mathbf{j} \dot{\mathbf{E}}_1 dV + \int_{S_{бок}} [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}] \dot{\mathbf{H}}_1 dS. \quad (8.27)$$

Соотношение (8.27) показывает, что различие между интегралами по поперечным сечениям $Q(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z})$ и $Q(\mathbf{z})$ вызывается сторонними источниками: распределёнными на участке $\Delta \mathbf{z}$ сторонними токами $\mathbf{j}$ внутри объёма и сторонними полями $\dot{\mathbf{E}}$ на поверхности.

Для дальнейшего преобразования выражений (8.25) и (8.26) полагаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_z, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_z, \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{S1} + \mathbf{E}_{z1}, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{S1} + \mathbf{H}_{z1}.$$

Используя соотношения (8.3), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \sum_n [\dot{e}_n(\mathbf{z}) \mathbf{F}_n(x, y) + \dot{p}_n(\mathbf{z}) \mathbf{f}_n(x, y)] \\ \dot{\mathbf{H}} &= \sum_n [\dot{h}_n(\mathbf{z}) \mathbf{G}_n(x, y) + \dot{q}_n(\mathbf{z}) \mathbf{g}_n(x, y)] \\ \dot{\mathbf{E}}_1 &= [\dot{e}_{v1}(\mathbf{z}) \mathbf{F}_v(x, y) + \dot{p}_v \dot{h}_{v1}(\mathbf{z}) \mathbf{f}_v(x, y)] \\ \dot{\mathbf{H}}_1 &= \left[\dot{h}_{v1}(\mathbf{z}) \mathbf{G}_v(x, y) + \frac{1}{\dot{p}_v} \dot{e}_{v1}(\mathbf{z}) \mathbf{g}_v(x, y) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (8.28)$$

При написании соотношений (8.28) учтено, что в силу (8.5) и (8.6) для регулярного участка $\dot{p}_v(z) = \rho_v \dot{h}_v(z)$ и $\dot{q}_v(z) = \dot{e}_v(z)/\rho_v$.

Подставляя соотношения (8.28) в равенство (8.26), учтём, что в смешанное произведение входит продольный орт z^0 и, значит, члены с продольными векторами дадут нуль. Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$Q(z) = \int_{S_{nonep}} \{ [\dot{E}_1 H] - [\dot{E} \dot{H}_1] \} z^0 dS = \\ = \sum_{v, n} \left\{ \dot{e}_{v1} \dot{h}_n \int_{S_{nonep}} [F_v G_n] z^0 dS - \dot{e}_n \dot{h}_{v1} \int_{S_{nonep}} [F_n G_v] z^0 dS \right\}.$$

Замечая, что $[F_v G_n] z^0 = F_v [G_n z^0] = F_v F_n$, а $[F_n G_v] z^0 = F_n F_v$, находим

$$Q(z) = \sum_n (\dot{e}_{v1} \dot{h}_n - \dot{e}_n \dot{h}_{v1}) \int_{S_{nonep}} F_v F_n dS.$$

Используя свойство ортогональности (8.7), убеждаемся, что все слагаемые суммы, за исключением слагаемого с номером $n = v$, обращаются в нуль и тогда, учитывая нормировку (8.11), находим

$$Q(z) = \dot{e}_{v1}(z) \dot{h}_v(z) - \dot{e}_v(z) \dot{h}_{v1}(z).$$

Опуская для краткости индекс v , получим

$$Q(z) = \dot{e}_1(z) \dot{h}(z) - \dot{e}(z) \dot{h}_1(z). \quad (8.29)$$

Поделив обе части равенства (8.27) на Δz и переходя к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$, найдём

$$\frac{dQ}{dz} = - \int_{S_{nonep}} j \dot{E}_1 dS + \oint_C [n \dot{E}] \dot{H}_1 dl. \quad (8.30)$$

Преобразуем далее равенство (8.30), используя выражения (8.28) для $\dot{E}_1$ и $\dot{H}_1$ и выражение (8.29) для $Q(z)$. Получим

$$\frac{d}{dz} [\dot{e}_1(z) \dot{h}(z) - \dot{e}(z) \dot{h}_1(z)] = \\ = \dot{e}_1(z) \left[- \int_{S_{nonep}} j F dS + \frac{1}{\rho} \oint_C [n \dot{E}] g dl \right] - \\ - \dot{h}_1(z) \left[\rho \int_{S_{nonep}} j f dS - \oint_C [n \dot{E}] G dl \right].$$

Вводя вспомогательные функции:

$$\dot{\eta}(\mathbf{z}) = - \int_{S_{\text{попер}}} \mathbf{j} \mathbf{F} dS + \frac{1}{\rho} \oint_C [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}] \mathbf{g} d\mathbf{l}, \quad (8.31)$$

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{z}) = \rho \int_{S_{\text{попер}}} \mathbf{j} \mathbf{f} dS - \oint_C [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}] \mathbf{G} d\mathbf{l}, \quad (8.32)$$

получим

$$\frac{d}{dz} [e_1(\mathbf{z}) \dot{h}(\mathbf{z}) - \dot{e}(\mathbf{z}) h_1(\mathbf{z})] = \dot{e}_1(\mathbf{z}) \dot{\eta}(\mathbf{z}) - \dot{h}_1(\mathbf{z}) \dot{\varepsilon}(\mathbf{z}). \quad (8.33)$$

Поскольку поле $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\mathbf{H}_1$ — произвольное поле соответствующего типа волны на регулярном участке волновода, можно положить:

$$\dot{e}_1(\mathbf{z}) = e^{-\gamma z},$$

$$\dot{h}_1(\mathbf{z}) = e^{-\gamma z} / \rho,$$

что соответствует прямой волне, и тогда, дифференцируя, найдём

$$-\gamma \dot{h}(\mathbf{z}) + \frac{d\dot{h}}{dz} - \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{e}}{dz} + \frac{\gamma}{\rho} \dot{e}(\mathbf{z}) = \dot{\eta}(\mathbf{z}) - \frac{1}{\rho} \dot{\varepsilon}(\mathbf{z}).$$

Если же положить $\dot{e}_1(\mathbf{z}) = e^{\gamma z}$, а $\dot{h}_1(\mathbf{z}) = -e^{\gamma z} / \rho$, что соответствует обратной волне, получим

$$\gamma \dot{h}(\mathbf{z}) + \frac{d\dot{h}}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{e}}{dz} + \frac{\gamma}{\rho} \dot{e}(\mathbf{z}) = \dot{\eta}(\mathbf{z}) + \frac{1}{\rho} \dot{\varepsilon}(\mathbf{z}).$$

Беря полусумму двух полученных равенств и обозначая

$$\frac{\gamma}{\rho} = Y_0, \quad (8.34)$$

найдем

$$\frac{d\dot{h}}{dz} = -Y_0 \dot{e} + \dot{\eta}(\mathbf{z}). \quad (8.35)$$

Беря полуразность и умножая на $-\rho$, получим

$$\frac{d\dot{e}}{dz} = -Z_0 \dot{h} + \dot{\varepsilon}(\mathbf{z}), \quad (8.36)$$

где

$$Z_0 = \gamma \rho. \quad (8.37)$$

Дифференциальные уравнения (8.35) и (8.36) характеризуют закон распределения поперечных составляющих поля вдоль волновода с источниками. Функции распределения источников $\dot{\eta}(z)$ и $\dot{\epsilon}(z)$ рассчитываются через сторонние токи и поля в щелях по ф-лам (8.31) и (8.32).

По аналогии с плотностью поверхностного электрического тока $[\text{п А}]$ говорят иногда о плотности поверхностного магнитного тока $[\text{п В}]$. При использовании этой терминологии можно сказать, что функции распределения источников выражаются через сторонние электрические и магнитные токи.

§ 8.6. АНАЛОГИЯ С ЛИНИЯМИ

Рассмотрим длинную линию с погонным сопротивлением (т. е. сопротивлением на единицу длины) Z_0 и погонной проводимостью Y_0 . Пусть в линию включены источники: последовательно вклю-

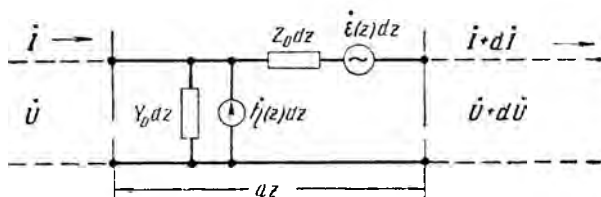


Рис. 8.6. К выводу уравнений для длинной линии с распределёнными источниками

чённые генераторы эдс, имеющие внутреннее сопротивление, равное нулю, и параллельно включённые генераторы тока, имеющие шунтирующую проводимость, равную нулю. Пусть, далее, эти источники распределены вдоль линии и характеризуются погонной эдс и погонным током источников с комплексными амплитудами $\dot{\epsilon}(z)$ и $\dot{\eta}(z)$. Тогда на элементе длины линии dz (рис. 8.6) включены: последовательно—сопротивление $Z_0 dz$ и эдс $\dot{\epsilon}(z) dz$ и параллельно — проводимость $Y_0 dz$ и ток источника $\dot{\eta}(z) dz$. Применяя законы Кирхгофа к этому элементу, получим:

$$\begin{aligned} d\dot{U} &= -\dot{I}Z_0 dz + \dot{\epsilon}(z) dz, \\ d\dot{I} &= -\dot{U}Y_0 dz + \dot{\eta}(z) dz \end{aligned}$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{U}}{dz} &= -Z_0 \dot{I} + \dot{\epsilon}(z) \\ \frac{d\dot{I}}{dz} &= -Y_0 \dot{U} + \dot{\eta}(z) \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

Простое сопоставление ур-ний (8.35), (8.36) с ур-ниями (8.38) свидетельствует об их единстве. В обоих случаях каждый источник на элементе длиной от z_1 до $z_1 + dz$ возбуждает волны с распределением вдоль оси z вида $e^{\pm \gamma(z-z_1)}$ и суммарное поле определяется интерференцией этих волн.

Различие генераторов эдс и тока с этой точки зрения заключается в следующем. Генераторы эдс, последовательно включённые в линию, создают по обе стороны *синфазные волны тока* и

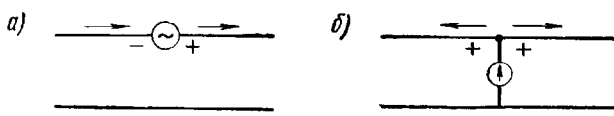


Рис. 8.7. Пояснение различий при включении в линию генераторов эдс и тока

противофазные — напряжения (рис. 8.7а); генераторы тока, параллельно включённые в линию, создают *синфазные волны напряжения и противофазные — тока* (рис. 8.7б). Для волновода некоторые источники создают по обе стороны синфазные волны поперечного электрического поля и противофазные волны поперечного магнитного поля: они *аналогичны генераторам тока* в линии. Другие источники создают синфазные волны поперечного магнитного поля и противофазные — поперечного электрического; они *аналогичны генераторам эдс*.

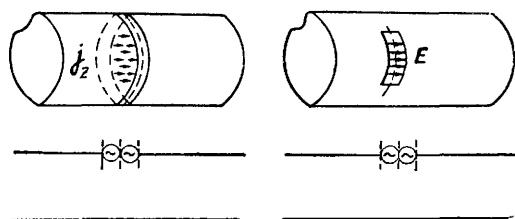


Рис. 8.8. Эквивалентные схемы при возбуждении продольными токами и полями в щелях

В частности, как это следует из соотношения (8.31) и соответствует изложенным выше соображениям, введение в волновод распределённых *продольных* токов или создание *продольных* электрических полей в щелях эквивалентно *последовательному* включению распределённых генераторов эдс (рис. 8.8).

Наоборот, введение распределённых *поперечных* токов или создание *поперечных* полей в щелях эквивалентно *параллельному* включению в линию распределённых генераторов *тока* (рис. 8.9).

Практически продольный и поперечный сторонние токи соответствуют возбуждению волновода штырём, соответственно продольным или поперечным. Продольное стороннее электрическое

поле соответствует, например, возбуждению волновода узкой поперечной щелью, а поперечное стороннее электрическое поле — возбуждению волновода узкой продольной щелью.

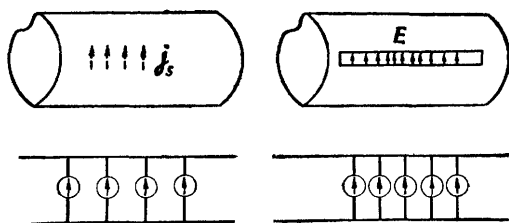


Рис. 8.9. Эквивалентные схемы при возбуждении поперечными токами и полями в щелях

Полученные результаты проиллюстрируем на примере возбуждения волны H_{01} в прямоугольном волноводе. При этом воспользуемся аналогией (см. § 1.4) между распространением волны в прямоугольном волноводе и в линии с металлическими изоляторами. Введение поперечного тока в волновод (рис. 8.10а) означает просто его ёмкостное подключение между проводниками основной линии (через токи смещения) и эквивалентно включению генератора тока (рис. 8.10б).

Создание продольного электрического поля в щели (рис. 8.10в) эквивалентно последовательному включению эдс в линию (рис. 8.10г).

Наоборот, возбуждение поперечным электрическим полем (рис. 8.10д) означает последовательное включение эдс, но не в основную линию, а в шунтирующий её закороченный резонансный отрезок. Ток на входе этого отрезка, равный нулю при отсутствии эдс, достигает некоторого конечного значения, что и эквивалентно подключению источника тока к основной линии (рис. 8.10е).

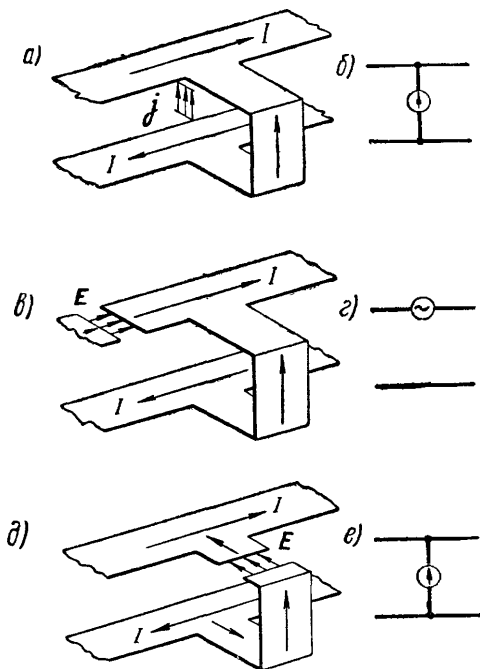


Рис. 8.10. Пояснение характера эквивалентных источников

§ 8.7. БЕСКОНЕЧНАЯ ЛИНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ. ПОНЯТИЕ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИСТОЧНИКАХ

Пусть в сечение ξ линии (рис. 8.11) и пока только в это сечение включён генератор эдс $\dot{\varepsilon}(\xi) d\xi$ (здесь и ниже речь идёт о комплексных амплитудах). Поскольку в сечениях, примыкающих

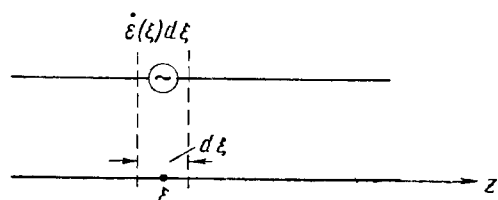


Рис. 8.11. Бесконечная линия с сосредоточенным источником

справа и слева к генератору, входные сопротивления равны ρ , напряжения будут соответственно $\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi$ и

$-\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi$. Тогда в произвольном сечении $z > \xi$ напряжение будет $\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}(\xi) e^{-\gamma(z-\xi)} d\xi$, а

в сечении $z < \xi$ соответственно $-\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}(\xi) e^{\gamma(z-\xi)} d\xi$.

Если генераторы эдс распределены по координатам ξ , можно применить принцип суперпозиции, и тогда

$$\dot{U}(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \dot{\varepsilon}(\xi) e^{-\gamma(z-\xi)} d\xi - \frac{1}{2} \int_z^{\infty} \dot{\varepsilon}(\xi) e^{\gamma(z-\xi)} d\xi.$$

В свою очередь, для тока найдём

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{2\rho} \int_{-\infty}^z \dot{\varepsilon}(\xi) e^{-\gamma(z-\xi)} d\xi + \frac{1}{2\rho} \int_z^{\infty} \dot{\varepsilon}(\xi) e^{\gamma(z-\xi)} d\xi.$$

Если же имеются и распределённые генераторы эдс и распределённые генераторы тока, ещё раз применяя принцип суперпозиции, получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z [\rho \dot{\eta}(\xi) + \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{-\gamma(z-\xi)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_z^{\infty} [\rho \dot{\eta}(\xi) - \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{\gamma(z-\xi)} d\xi, \\ \dot{I}(z) &= \frac{1}{2\rho} \int_{-\infty}^z [\rho \dot{\eta}(z) + \dot{\varepsilon}(z)] e^{-\gamma(z-\xi)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\rho} \int_z^{\infty} [\rho \dot{\eta}(\xi) - \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{\gamma(z-\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Пусть источники распределены на ограниченном участке линии $z_1 < \xi < z_2$ (рис. 8.12a). Тогда можно написать:
для $z < z_1$

$$\dot{U}(z) = \left\{ \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} [\rho \dot{\eta}(\xi) - \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{-\gamma \xi} d\xi \right\} e^{\gamma z}$$

$$\dot{I}(z) = -\frac{1}{\rho} \dot{U}(z)$$

для $z > z_2$

$$\dot{U}(z) = \left\{ \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} [\rho \dot{\eta}(\xi) + \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{\gamma \xi} d\xi \right\} e^{-\gamma z}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{\rho} \dot{U}(z)$$

(8.40)

Две системы источников, распределённые на участке $z_1 < z < z_2$, назовём *эквивалентными системами источников*, если они создают одинаковые волны по каждую сторону от участка. В

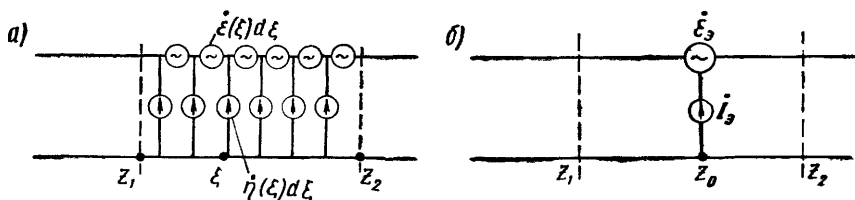


Рис. 8.12. Введение эквивалентных источников

частности, произвольно распределённой на участке $z_1 < z < z_2$ системе источников (рис. 8.12a) эквивалентна система источников из генератора напряжения $\dot{E}_3$ и генератора тока I_3 , включённых в произвольное сечение $z = z_0$, где $z_1 < z_0 < z_2$ (рис. 8.12б), если обе системы создают по каждую сторону от участка одинаковые напряжения и токи. В последнем случае (рис. 8.12a):

для $z < z_0$

$$\dot{U}(z) = \frac{\rho I_3 - \dot{E}_3}{2} e^{\gamma(z-z_0)}$$

$$\dot{I}(z) = -\frac{1}{\rho} \dot{U}(z)$$

для $z > z_0$

$$\dot{U}(z) = \frac{\rho I_3 + \dot{E}_3}{2} e^{-\gamma(z-z_0)}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{\rho} \dot{U}(z)$$

(8.41)

Сопоставляя ур-ния (8.40) и (8.41), имеем:

$$\frac{\rho \dot{I}_s + \dot{E}_s}{2} = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} [\rho \dot{\gamma}(\xi) + \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{\gamma(\xi - z_0)} d\xi,$$

$$\frac{\rho \dot{I}_s - \dot{E}_s}{2} = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} [\rho \dot{\gamma}(\xi) - \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{-\gamma(\xi - z_0)} d\xi.$$

Беря разность и сумму равенств, находим значения эквивалентных источников:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_s &= \int_{z_1}^{z_2} [\dot{\varepsilon}(\xi) \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) + \rho \dot{\gamma}(\xi) \operatorname{sh} \gamma(\xi - z_0)] d\xi \\ \dot{I}_s &= \int_{z_1}^{z_2} [\dot{\gamma}(\xi) \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) + \frac{1}{\rho} \dot{\varepsilon}(\xi) \operatorname{sh} \gamma(\xi - z_0)] d\xi \end{aligned} \right\}. \quad (8.42)$$

В частном случае, если распределение источников симметричное, а z_0 — центр распределения, второе слагаемое в каждом из выражений (8.42) выпадает и мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_s &= \int_{z_1}^{z_2} \dot{\varepsilon}(\xi) \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) d\xi \\ \dot{I}_s &= \int_{z_1}^{z_2} \dot{\gamma}(\xi) \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) d\xi \end{aligned} \right\}. \quad (8.42a)$$

Это значит, что система распределённых генераторов эдс заменяется сосредоточенным генератором эдс без генератора тока, а система распределённых генераторов тока — сосредоточенным генератором тока без генератора эдс.

§ 8.8. БЕСКОНЕЧНЫЙ И КОНЕЧНЫЙ ВОЛНОВОДЫ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Выражения (8.39), полученные для бесконечной линии с распределёнными источниками, в силу тождества дифференциальных уравнений непосредственно распространяются на произвольный тип колебаний в волноводе с распределёнными источниками, если напряжение $\dot{U}(z)$ линии заменить скалярной комплексной амплитудой $\dot{\varepsilon}(z)$, а ток $\dot{I}(z)$ — скалярной комплексной амплитудой $\dot{\gamma}(z)$ и взять γ и ρ , соответствующие данному типу колебаний.

В случае конечной линии или волновода добавляются лишь волны, отражённые от концов. Видоизменённые соотношения (8.39) для волновода конечной длины ($0 < z < L$) тогда принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}(z) &= \frac{1}{2} \int_0^z [\rho \dot{\eta}(\xi) + \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{-\gamma(z-\xi)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_z^L [\rho \dot{\eta}(\xi) - \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{\gamma(z-\xi)} d\xi + C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z} \\ \dot{h}(z) &= \frac{1}{2\rho} \int_0^z [\rho \dot{\eta}(\xi) + \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{-\gamma(z-\xi)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\rho} \int_z^L [\rho \dot{\eta}(\xi) - \dot{\varepsilon}(\xi)] e^{\gamma(z-\xi)} d\xi + \frac{C_1}{\rho} e^{-\gamma z} - \frac{C_2}{\rho} e^{\gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определяются из граничных условий в зависимости от нагрузок на концах волновода.

Если источники распределены на участке $z_1 < \xi < z_2$, то для сечений, лежащих за пределами этого участка, справедлива замена этих источников эквивалентными. Замена, сделанная в § 8.7 для бесконечной системы, остаётся справедливой и для конечной, поскольку интегралы в (8.43) по существу не изменились. По аналогии эквивалентные источники $\dot{I}_g$ и $\dot{E}_g$ будем соответственно называть генераторами тока и эдс.

Эквивалентные источники полностью заменяют исходные, т. е. создают такие же поля всюду, за исключением участка $z_1 < z < z_2$, где были распределены исходные источники. Если потребление активной мощности происходит за пределами этого участка, то активная мощность, отдаваемая эквивалентным источником, будет такая же, как и активная мощность, отдаваемая распределёнными источниками.

§ 8.9. РАСЧЁТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ

Пример 1. Волновод возбуждается цилиндрическим поперечным штырём с диаметром $2r$, по которому протекает ток с распределением $I(l)$ по длине. Найти общую формулу эквивалентного источника в сечении оси штыря z_0 при условии $\gamma d \ll 1$ для произвольного типа волны. Применить формулу в случае возбуждения волны H_{01} поперечным штырём, параллельным узкой стенке прямоугольного волновода (рис. 8.13). Расчёт эквивалентных источников производится по общим ф-лам (8.31) и (8.32) с учётом того, что при отсутствии щелей векторное произведение $[\mathbf{n} \mathbf{E}] = 0$.

Поскольку в данном случае ток поперечный, произведение $\mathbf{j} \mathbf{f} = 0$ как скалярное произведение взаимно-перпендикулярных векторов. Поэтому отличны от нуля только источники

$$\dot{\gamma}_i(\mathbf{z}) = \int_{S_{\text{попер}}} \mathbf{j} \mathbf{F} dS$$

(см. также § 8.6). Используя соотношение (8.42а), находим

$$I_s = \int_{z_1}^{z_2} \dot{\gamma}_i(\xi) \operatorname{ch} \gamma (\xi - z_0) d\xi = - \int_{z_1}^{z_2} \int_{S_{\text{попер}}} \mathbf{j} \mathbf{F} \operatorname{ch} \gamma (\xi - z_0) dS d\xi.$$

Поскольку для участка, занятого током $|\xi - z_0| \leq r$, то $\operatorname{ch} \gamma (\xi - z_0) \approx \operatorname{ch} 0 = 1$. Заменяя интегрирование по поперечному сечению волновода и координате z интегрированием по объёму, занятому током, получим

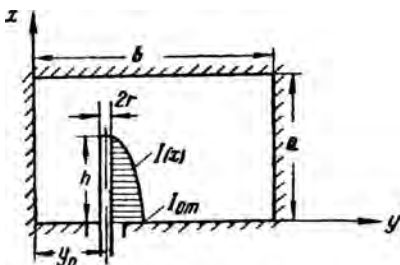


Рис. 8.13. Поперечный штырь в прямоугольном волноводе. Показан закон распределения тока по штырю

$$I_s = - \int \mathbf{j} \mathbf{F} dV.$$

Продолжим начатое преобразование, интегрируя сначала по длине, а затем по сечению штыря. Замечая, что интеграл от плотности тока по сечению штыря даёт ток $I(l)$, получим

$$I_s = - \int I(l) \mathbf{F}(l) dl, \quad (8.44)$$

где интегрирование ведётся по длине штыря, а dl — векторный элемент этой длины.

В частности, при возбуждении волны H_{01} поперечным штырём, параллельным узкой стенке прямоугольного волновода (рис. 8.13), будем иметь $dl = x^0 dx$. Далее, вместо $\mathbf{F}(l)$ нужно взять значение $\mathbf{F}(x, y_0)$, где y_0 — координата центра штыря, из (7.3) с учётом значения нормирующего множителя (8.14)

$$\mathbf{F}(l) = \mathbf{F}(x, y_0) = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi}{b} y_0 x^0.$$

Тогда получим

$$I_s = - \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi}{b} y_0 \int_0^h I(x) dx = - I_0 \sqrt{\frac{2}{ab}} h_d \sin \frac{\pi}{b} y_0. \quad (8.45)$$

Здесь величину

$$h_0 = \frac{1}{I_0} \int_0^h I(x) dx \quad (8.46)$$

можно назвать *действующей высотой* штыря. Последняя представляет собой высоту штыря с равномерным распределением тока, имеющего ту же „площадь тока“ $\int_0^h I(x) dx$, что и данный штырь.

Пример 2. Рассчитать эквивалентные источники для узких продольных полуволновых щелей, считая напряжение вдоль щели синусоидальным,

$$\dot{U}(z) = U_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\xi - z_0), \quad \left(z_0 - \frac{\lambda}{4} < \xi < z_0 + \frac{\lambda}{4} \right),$$

где z_0 — координата центра щели.

Полученный результат применить для случая возбуждения волны основного типа в прямоугольном волноводе: а) продольной щелью в широкой стенке (рис. 8.14б), б) продольной щелью в узкой стенке (рис. 8.14а).

В соотношениях (8.31)–(8.32) смешанное произведение $[\mathbf{n} \mathbf{E}] \mathbf{G} = 0$, так как вектор $\mathbf{E}$ в щели и вектор $\mathbf{G}$ в данном случае коллинеарны. Поэтому отличны от нуля только источники $\dot{\eta}(z)$ (см. также § 8.6). Из соотношений (8.42а) и (8.31), относя эквивалентный источник к центру щели получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_z &= \int_{z_1}^{z_2} \dot{\eta}(\xi) \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) d\xi = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) \frac{1}{\rho} \int [\mathbf{n} \mathbf{E}] \mathbf{g} dl d\xi. \end{aligned}$$

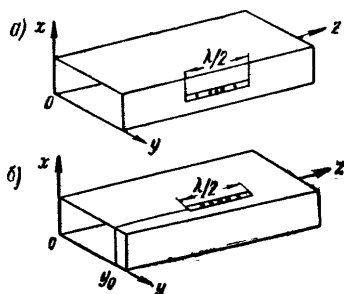


Рис. 8.14. Продольные полуволновые щели в прямоугольном волноводе

В рассматриваемом случае узкой щели $\dot{E} = -\frac{U(\xi)}{d} \mathbf{z}^0$, где d — ширина щели, $[\mathbf{n} \mathbf{E}] = \frac{\dot{U}(\xi)}{d} \mathbf{z}^0$, и далее в пределах узкой щели

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(x, y) \approx \mathbf{g}(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) \mathbf{z}^0,$$

где x_0, y_0 — координаты центра щели, поэтому приближённо

$$\dot{\eta}(\xi) = \frac{1}{\rho} \int [\mathbf{n} \mathbf{E}] \mathbf{g} dl = \frac{1}{\rho} \dot{U}(\xi) g(x_0, y_0) \frac{1}{d} \int dl = \frac{1}{\rho} \dot{U}(\xi) g(x_0, y_0).$$

Заменяя $\gamma = i\alpha = i \frac{2\pi}{\lambda_g}$, получим

$$\begin{aligned} I_g &= \frac{g(x_0, y_0)}{\rho} \int_{z_1}^{z_2} \dot{U}(\xi) \cos \alpha (\xi - z_0) d\xi = \\ &= \frac{\dot{U}_0}{\rho} g(x_0, y_0) \int_{z_0 - \frac{\lambda}{4}}^{z_0 + \frac{\lambda}{4}} \cos \frac{2\pi}{\lambda_g} (\xi - z_0) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\xi - z_0) d\xi. \end{aligned}$$

Вычисляя определённый интеграл и принимая во внимание связь между λ , λ_g и $\lambda_{кр}$, можно получить

$$I_g = \frac{\dot{U}_0}{\rho} g(x_0, y_0) \frac{\lambda_{кр}^2}{\pi\lambda} \cos \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g}. \quad (8.47)$$

Применительно к волне H_{01} значение модуля вектора $\mathbf{g}(x, y)$ возьмём из соотношений (7.3) с учётом нормирующего множителя (8.14). Для щели в широкой стенке получим

$$\begin{aligned} I_g &= \frac{\dot{U}_0}{\rho} \left(-i \frac{\lambda_g}{2b} \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{\lambda_g}{2b} \cos \frac{\pi}{b} y_0 \right) \frac{\lambda_{кр}^2}{\pi\lambda} \cos \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g} = \\ &= -i \frac{\dot{U}_0}{\rho_0} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g} \cos \frac{\pi}{b} y_0. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Здесь учтено, что $\lambda_{кр} = 2b$ и $\rho = \rho_H = \rho_0 \frac{\lambda_g}{\lambda}$.

Для щели в узкой стенке ($y_0 = b$) будем иметь

$$I_g = i \frac{\dot{U}_0}{\rho_0} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g}. \quad (8.49)$$

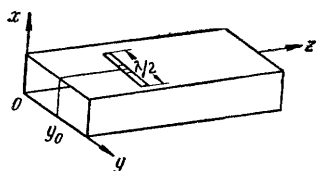


Рис. 8.15. Поперечная полу-волновая щель в прямоугольном волноводе

Пример 3. Рассчитать эквивалентные источники для узких поперечных полуволновых щелей. Полученный результат применить к возбуждению волны основного типа в прямоугольном волноводе (рис. 8.15), считая распределение поля вдоль щели синусоидальным:

$$U(y) = \dot{U}_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (y - y_0), \quad \left(y_0 - \frac{\lambda}{4} < y < y_0 + \frac{\lambda}{4} \right).$$

В соотношениях (8.31), (8.32) смешанное произведение $[\mathbf{n} \mathbf{E}] \mathbf{g} = 0$, так как вектор $\mathbf{E}$ в щели и вектор $\mathbf{g}$ в данном случае кол-

линейны. Поэтому отличны от нуля только источники $\varepsilon(\mathbf{z})$ (см. также § 8.6). Из соотношений (8.42а) и (8.32) получим

$$\dot{E}_s = \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon(\xi) \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) d\xi = - \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) \int [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}] \mathbf{G} dl d\xi.$$

В рассматриваемом случае узкой щели $\operatorname{ch} \gamma(\xi - z_0) \approx \operatorname{ch} 0 = 1$,

$$\dot{\mathbf{E}} = - \frac{\dot{U}_0}{d} \mathbf{z}^0 \text{ и } [\mathbf{n} \dot{\mathbf{E}}] = \frac{\dot{U}_0}{d} [\mathbf{n} \mathbf{z}^0] = \frac{\dot{U}_0}{d} \mathbf{l}^0,$$

где $\mathbf{l}^0$ — единичный вектор, направленный вдоль щели.

Тогда

$$\dot{E}_s = \int \dot{U}_0(l) \mathbf{G}(l) d\mathbf{l}^0 \frac{1}{d} \int_{z_0 - \frac{\lambda}{2}}^{z_0 + \frac{\lambda}{2}} d\xi = \int \dot{U}_0(l) \mathbf{G}_l(l) d\mathbf{l}^0. \quad (8.50)$$

Здесь $\mathbf{G}_l = \mathbf{G} \mathbf{l}^0$ — проекция вектора $\mathbf{G}$ на направление $\mathbf{l}^0$.
В случае (рис. 8.15)

$$\mathbf{l}^0 = [\mathbf{n} \mathbf{z}^0] = \mathbf{y}^0, \mathbf{G}_l(l) = \mathbf{y}^0 G_y(x_0, y) \text{ и } \dot{U}_0(l) = \dot{U}_0(y).$$

В силу соотношений (7.3) и (8.14) для волны H_{01}

$$G_y(x_0, y) = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi}{b} y = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} y,$$

так что

$$\dot{E}_s = \dot{U}_0 \sqrt{\frac{2}{ab}} \int_{y_0 - \frac{\lambda}{4}}^{y_0 + \frac{\lambda}{4}} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (y - y_0) \sin \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} y dy.$$

Вычисляя определённый интеграл и принимая во внимание связь между $\lambda, \lambda_{кр}$ и λ_s , можно получить

$$\dot{E}_s = \dot{U}_0 \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_s}{\lambda} \cos \frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{b} \sin \frac{\pi}{b} y_0. \quad (8.51)$$

Пример 4. Найти выражения для тока и эдс эквивалентных генераторов для произвольно расположенного тонкого провода в волноводе с заданным распределением тока по длине.

Учитывая в отличие от примера 1 оба типа источников $\dot{\eta}(z)$ и $\dot{\varepsilon}(z)$ и пользуясь общими соотношениями (8.42), (8.31), (8.32), получим:

$$\dot{E}_s = \rho \iint \{ \mathbf{f} \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) - \mathbf{F} \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) \} dV,$$

$$\dot{I}_s = \iint \{ \mathbf{f} \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) - \mathbf{F} \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) \} dV.$$

Здесь интегрирование по поперечному сечению волновода и координате z заменено интегрированием по объёму волновода, т. е. $dV = dS_{\text{попер}} dz$.

Заменяя далее интегрирование по объёму, занятому током, интегрированием по площади и длине проводника, находим, что

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= \rho \int \vec{I}(l) \{ f \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) - F \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) \} dl \\ \vec{I}_s &= \int \vec{I}(l) \{ f \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) - F \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) \} dl \end{aligned} \quad (8.52)$$

Пример 5. Используя выражения (8.52), найти эквивалентные источники применительно к случаю возбуждения волновода произвольно-ориентированным малым витком с током $I(l) = I_0$. Отдельно рассмотреть случаи, когда виток расположен в продольной и поперечной плоскостях.

Применительно к витку интегралы (8.52) являются контурными и, применяя теорему Стокса, получим:

$$\vec{E}_s = \rho \vec{I}_0 \int \operatorname{rot} \{ f \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) - F \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) \} dS,$$

$$\vec{I}_s = \vec{I}_0 \int \operatorname{rot} \{ f \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) - F \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) \} dS,$$

Используя формулу векторного анализа $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}]$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [f \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) \mathbf{z}^0] - [F \operatorname{sh} \gamma(z - z_0)] &= [\operatorname{grad} f, \mathbf{z}^0] \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) + \\ &+ \operatorname{rot} F \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) + [F \mathbf{z}^0] \gamma \operatorname{ch} \gamma(z - z_0). \end{aligned}$$

Заменяя в соответствии с § 7.2 $\operatorname{rot} \mathbf{F} = [\nabla_S \mathbf{F}] = -\frac{i \omega \mu}{\rho} \mathbf{g}$, $\operatorname{grad} f =$
 $= \left(\frac{i \omega \mu}{\rho} - \gamma \right) \mathbf{F}$ (т. е. $-\frac{k^2}{\gamma} \mathbf{F}$ при $\rho = \rho_E = \frac{\gamma}{i \omega \epsilon}$ и 0 при $\rho = \rho_H = \frac{i \omega \mu}{\gamma}$),
 а также $[F \mathbf{z}^0] = -\mathbf{G}$, получим

$$\vec{E}_s = -i \omega \mu \int \{ \mathbf{G} \operatorname{ch} \gamma(z - z_0) - \mathbf{g} \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) \} dS.$$

Считая, что координата центра приведения источников z_0 совпадает с центром витка, замечаем, что в силу его малости можно положить:

$$\operatorname{ch} \gamma(z - z_0) \approx 1 \text{ и } \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) \approx 0.$$

Тогда получим

$$\vec{E}_s \approx -i \omega \mu \vec{I}_0 \int \mathbf{G} dS \approx -i \omega \mu \vec{I}_0 G S \cos \theta, \quad (8.53)$$

где S — площадь витка, а θ — угол между вектором $\mathbf{G}$ и вектором нормали к витку.

Подобным же образом

$$\vec{I}_s \approx \frac{i \omega \mu}{\rho} \vec{I}_0 \int \mathbf{g} dS = \frac{i \omega \mu}{\rho} \vec{I}_0 g S \cos \theta_1, \quad (8.54)$$

где θ_1 — угол между вектором $\mathbf{g}$ и вектором нормали.

Отсюда видно, что виток, лежащий в продольной плоскости, заменяется генератором эдс ($\cos \theta_1 = 0$), а виток, лежащий в поперечной плоскости — генератором тока ($\cos \theta = 0$). Для описания поля повёрнутого витка необходимо включение в линию обоих генераторов.

§ 8.10. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА ПОЛЯ ПО ЗАДАНЫМ ИСТОЧНИКАМ

То обстоятельство, что ур-ния (8.31) и (8.32) по своей форме совпадают с дифференциальными уравнениями длинной линии, позволяет заменить непосредственное решение системы дифференциальных уравнений расчётом *эквивалентной линии* (т. е. применить метод *моделирования*). При этом хорошо разработанные способы инженерного расчёта и качественного анализа длинных линий могут быть распространены на волноводы. Для инженера-

радииста последнее может оказаться более удобным, чем непосредственное решение системы уравнений, так как облегчается анализ режимов произвольно нагруженных волноводов. Следует сразу же оговорить, что из расчёта эквивалентной схемы могут быть найдены только скалярные комплексные амплитуды $\dot{e}(z)$ и $\dot{h}(z)$. Переход к мгновенным значениям при наличии одного типа волны осуществляется путём умножения на соответствующую собственную векторную функцию и временной множитель $e^{i\omega t}$ (а при наличии ряда типов волн необходимо наложить подобные решения, полученные для различных типов).

При составлении эквивалентной схемы скалярные комплексные амплитуды $\dot{e}(z)$ и $\dot{h}(z)$ играют роль комплексных амплитуд напряжения и тока в эквивалентной длинной линии; величины $\dot{e}(z)$ и $\dot{h}(z)$ играют роль комплексных амплитуд источников ЭДС и тока, приходящихся на единицу длины; волновое сопротивление волновода ρ и сопротивление нагрузки Z_n по полю входят в эквивалентную схему как волновое сопротивление линии и её сопротивление нагрузки соответственно. Вместо сопротивления нагрузки Z_n может быть задан коэффициент отражения ρ_n .

Расчёт эквивалентной линии оказывается наиболее простым, если в неё включены *сосредоточенные источники*, т. е. источники, каждый из которых может быть отнесён к вполне определённой сечению z .

Распределённые источники можно *заменить эквивалентными сосредоточенными*, как это сделано в § 8.9, если нас не интересует распределение поля в окрестности источника, а только за его пределами. В противном случае, надо накладывать граничные условия на общие соотношения (8.43).

Методика расчёта поля в волноводе (или в волноводном резонаторе), основанная на расчёте эквивалентной линии, иллюстрируется ниже на ряде примеров.

Пример 1. Рассчитать электрическое поле волны основного типа в прямоугольном волноводе, согласованном с двух сторон (рис. 8.16), если задана комплексная амплитуда тока $\dot{I}_0$ у основания штыря. Построить графики распределения поля вдоль оси z для основного и ближайшего высшего типа волны.

Волновод (рис. 8.16а) заменяем согласованной с двух сторон эквивалентной длинной линией с включённым в неё генератором тока $\dot{I}_s$ (рис. 8.16б). Отрезки линии, присоединённые к генератору, заменяем далее эквивалентными волновыми сопротивлениями ρ (рис. 8.16в). Пользуясь полученной схемой, находим напряжение эквивалентной линии (скалярную комплексную амплитуду электрического поля) в сечении штыря $\dot{e}(0) = \dot{I}_s \frac{\rho}{2}$. Умножая получен-

ное выражение на $e^{\mp \gamma z}$, находим скалярную комплексную амплитуду

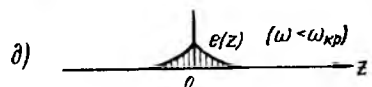
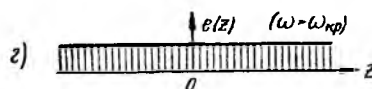
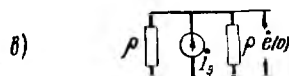
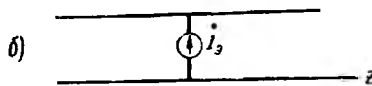
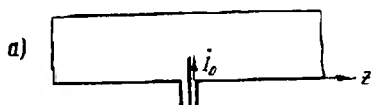


Рис. 8.16. Эквивалентные схемы и графики распределения амплитуд для согласованного с двух сторон волновода, возбуждаемого поперечным штырём

литуду в произвольном сечении

$$\begin{aligned} \dot{e}(z) &= \dot{e}(0) e^{\mp \gamma z} = e(0) e^{-\gamma |z|} = \\ &= I_0 \frac{\rho}{2} e^{-\gamma |z|}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Знак плюс перед постоянной распространения относится при этом к области $z < 0$, знак минус — к области $z > 0$, а выражение, содержащее абсолютное значение координаты z , позволяет учесть сразу оба случая.

Графики распределения скалярных комплексных амплитуд $e(z) = |\dot{e}(z)|$ показаны на рис. 8.16г, д. Первый из них соответствует распространяющейся ($\gamma = i\alpha$), а второй — нераспространяющейся волнам ($\gamma = \beta$). В режиме согласования имеем равномерное распределение амплитуд в первом случае и экспоненциальное спадание — во втором.

Выражение для вектора электрического поля находим, пере-

множая выражение (8.55) для $\dot{e}(z)$, выражение для нормированной собственной векторной функции $F(x, y)$ волны H_{01} и временной множитель $e^{i\omega t}$. Подставляя значение I_0 [(ф-ла (8.45)], будем иметь

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S = -\dot{I}_0 \rho \frac{l_0}{ab} \sin \frac{\pi}{b} y_0 \sin \frac{\pi}{b} y e^{i\omega t - \gamma |z|}. \quad (8.56)$$

Здесь y_0 — координата штыря, y — текущая координата и $\rho = \rho_H = 120 \pi \frac{\lambda_g}{\lambda}$ — волновое сопротивление волновода.

Пример 2. Прямоугольный волновод, согласованный с одной стороны и закороченный с другой, возбуждается поперечным штырём (рис. 8.17а). Найти выражение для скалярной комплексной амплитуды $\dot{e}(z)$ волны основного типа в согласованной части волновода и сравнить его с выражением, полученным для волновода, согласованного с двух сторон. Сравнение произвести для двух случаев, полагая расстояние между штырём и короткозамыкающим поршнем $l = \frac{\lambda_g}{4}$ и $\frac{\lambda_g}{2}$. Построить графики распределения амплитуд поперечных составляющих поля вдоль оси z при $l = \frac{\lambda_g}{4}$.

Заменяем волновод (рис. 8.17а) эквивалентной линией, закороченной с одной стороны и согласованной с другой (рис. 8.17б). Отрезок согласованной линии заменяем далее волновым сопротивлением ρ , отрезок короткозамкнутой линии сопротивлением $Z_k = i\rho \operatorname{tg} \alpha l$ (рис. 8.17в). Пользуясь схемой (рис. 8.17в), найдем напряжение эквивалентной линии (скалярную комплексную амплитуду) в сечении штыря

$$\dot{e}(0) = I_3 Z_3,$$

где

$$Z_3 = \frac{\rho i \rho \operatorname{tg} \alpha l}{\rho + i \rho \operatorname{tg} \alpha l} =$$

$$= \rho \left(\sin^2 \alpha l + i \frac{1}{2} \sin 2\alpha l \right). \quad (8.57)$$

Вводя множитель $e^{-i\alpha z}$, учитывающий фазовое запаздывание, находим для согласованной части ($z > 0$)

$$\begin{aligned} \dot{e}(z) &= I_3 Z_3 e^{-i\alpha z} = \\ &= I_3 \rho \left(\sin^2 \alpha l + i \frac{1}{2} \sin 2\alpha l \right) e^{-i\alpha z}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

В частности, при $l = \frac{\lambda_6}{4}$ величина $\dot{e}(z) = I_3 \rho e^{-i\alpha z}$, что вдвое больше, чем в согласованном волноводе: при $l = \frac{\lambda_6}{2}$ величина

$\dot{e}(z) = 0$. Увеличение амплитуды вдвое в первом случае объясняется тем, что прямая волна от штыря и волна, отражённая от поршня, складываются в фазе; исчезновение поля во втором случае объясняется тем, что эти волны складываются в противофазе. На рис. 8.17 г и д показаны графики распределения поперечных составляющих поля в волноводе. Слева от штыря, где налагаются волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, имеет место режим *стоячей* волны. Справа от штыря, где по условию отражение отсутствует, имеет место режим *бегущей* волны.

Пример 3. Отрезок прямоугольного волновода закорочен с двух сторон (рис. 8.18а) и возбуждается поперечным штырём. Считая ток штыря заданным, найти величины и закон распре-

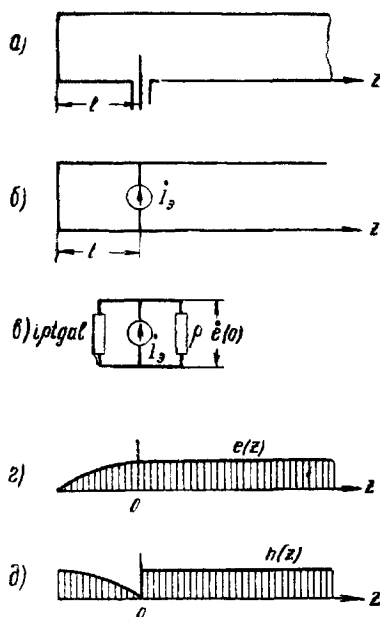


Рис. 8.17 Эквивалентные схемы и графики распределения амплитуд для закороченного с одной стороны волновода, возбуждаемого поперечным штырём

ления электрического поля скалярных комплексных амплитуд для волны H_{01} в волноводе в зависимости от положения подвижного поршня и, в частности, решить задачу о возбуждении волн H_{01p} в прямоугольном резонаторе.

Составляем эквивалентную схему линии (рис. 8.18 б), закороченные отрезки линии заменяем далее эквивалентными сопротивлениями $i\rho \operatorname{tg} \alpha l_0$ и $i\rho \operatorname{tg} \alpha l_1$ (рис. 8.18 в). Результирующее сопротивление

$$\frac{i\rho \operatorname{tg} \alpha l_0 \cdot i\rho \operatorname{tg} \alpha l_1}{i\rho \operatorname{tg} \alpha l_0 + i\rho \operatorname{tg} \alpha l_1} = \frac{i\rho \sin \alpha l_0 \sin \alpha l_1}{\sin \alpha (l_0 + l_1)}$$

характеризует скалярную комплексную амплитуду электрического поля в сечении штыря

$$\dot{e}(0) = \dot{I}_s \frac{i\rho \sin \alpha l_0 \sin \alpha l_1}{\sin \alpha (l_0 + l_1)}$$

В соответствии с законом распределения поля (рис. 8.18 з) можно написать:
для $z < 0$

$$\begin{aligned} \dot{e}(z) &= \dot{e}(0) \frac{\sin \alpha (l_0 + z)}{\sin \alpha l_0} = \\ &= i\rho \dot{I}_s \frac{\sin \alpha l_1 \sin \alpha (l_0 + z)}{\sin \alpha (l_0 + l_1)}, \end{aligned}$$

для $z > 0$

$$\dot{e}(z) = \dot{e}(0) \frac{\sin \alpha (l_1 - z)}{\sin \alpha l_1} = i\rho \dot{I}_s \frac{\sin \alpha l_0 \sin \alpha (l_1 - z)}{\sin \alpha (l_0 + l_1)}. \quad (8.59)$$

При $\alpha(l_0 + l_1) = \frac{2\pi}{\lambda_g}(l_0 + l_1) = 2\pi p$ ($p = 1, 2, \dots$), т. е. когда $l_0 + l_1 = l = p \frac{\lambda_g}{2}$, имеют место резонансы и поле обращается в бесконечность, так как не учтены потери в резонаторе¹⁾. При резонансе в эквивалентной схеме (рис. 8.18 в) одно из сопротивлений является ёмкостным, другое индуктивным. Распределение поля вдоль оси z при $l_0 + l_1 = p \frac{\lambda_g}{2}$ близко к синусоидальному и соответствует возбуждению волны H_{01p} в прямоугольном объёмном резонаторе.

¹⁾ Потери можно учесть, заменив $i\alpha$ на $\gamma = i\alpha + \beta$ и нагрузив линии на концах малыми сопротивлениями

$$Z_S = R_S + iX_S.$$

§ 8.11. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗБУЖДАЮЩЕГО ШТЫРЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ ВОЛНЕ ТИПА H_{01}

Входное сопротивление штыря определяется отношением полной мощности $\dot{P}$, подводимой питающим фидером к волноводу, к половине квадрата максимального значения тока I_{0m} у основания штыря

$$Z_{ex} = \frac{2\dot{P}}{I_{0m}^2}.$$

В силу ортогональности полей волн различных типов полную мощность $\dot{P}$, отдаваемую штырём в волновод, можно представить как сумму мощностей, отдаваемых различными типами волн,

$$\dot{P} = \sum_{v=1}^{\infty} \dot{P}_v = \dot{P}_1 + \sum_{v=2}^{\infty} \dot{P}_v.$$

В написанном выражении выделена полная мощность P_1 , расходуемая на возбуждение волн основного типа и содержащая активную составляющую. Поскольку в обычных условиях высшие типы волн не переносят активной мощности, написанное равенство можно представить так

$$\dot{P} = \dot{P}_1 + \dot{P}_{выс},$$

где $\dot{P}_1$ — полная мощность, расходуемая на создание основного типа волн, и $\dot{P}_{выс}$ — реактивная мощность, расходуемая на создание высших типов волн.

Мощность P_1 легко может быть рассчитана по эквивалентной схеме. Для волновода, закороченного с одной стороны и согласованного с другой, такая эквивалентная схема была показана на рис. 8.17. Пользуясь этой схемой, мощность $\dot{P}_1$ можно представить в виде

$$\dot{P}_1 = \frac{1}{2} I_{эм}^2 Z_s,$$

где в соответствии с соотношением (8.57)

$$Z_s = \rho (\sin^2 \alpha l + i \frac{1}{2} \sin 2 \alpha l).$$

Зная величину полной мощности $\dot{P}_1$ и имея в виду, что мощность $\dot{P}_{выс}$ является реактивной, можно написать

$$Z_{ex} = \frac{2\dot{P}_1}{I_{0m}^2} + \frac{2\dot{P}_{выс}}{I_{0m}^2} = \left(\frac{I_{эм}}{I_{0m}} \right)^2 \rho \left(\sin^2 \alpha l + i \frac{1}{2} \sin 2 \alpha l \right) + i X_{выс}.$$

Здесь

$$X_{\text{выс}} = \left| \frac{2 \dot{P}_{\text{выс}}}{I_{0m}^2} \right| \quad (8.60)$$

— величина реактивного сопротивления штыря, определяемая затратой реактивной мощности на создание волн высших типов, а I_{sm}/I_{0m} — отношение амплитуды тока эквивалентного генератора к амплитуде тока у основания штыря.

При возбуждении волны H_{01} в прямоугольном волноводе достаточно тонким штырём в силу (8.45) это отношение равно

$$\frac{I_{sm}}{I_{0m}} = \left| \frac{I_{\theta}}{I_0} \right| = \sqrt{\frac{2}{ab}} h_{\theta} \sin \frac{\pi}{b} y_0,$$

так что выражение для входного сопротивления принимает вид

$$Z_{\text{вх}} = \frac{2 h_{\theta}^2}{ab} \rho_H \sin^2 \frac{\pi}{b} y_0 \left(\sin^2 \alpha l + i \frac{1}{2} \sin 2 \alpha l \right) + i X_{\text{выс}}. \quad (8.61)$$

Выражение для входного сопротивления штыря можно представить также в следующем виде:

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + i X_{\text{вх}}, \quad (8.62)$$

где

$$R_{\text{вх}} = \frac{2 h_{\theta}^2}{ab} \rho_H \sin^2 \frac{\pi}{b} y_0 \sin^2 \alpha l = R_1 \quad (8.63)$$

— активная составляющая входного сопротивления, которая определяется только полем волны основного типа, и

$$X_{\text{вх}} = \frac{h_{\theta}^2}{ab} \rho_H \sin^2 \frac{\pi}{b} y_0 \sin 2 \alpha l + i X_{\text{выс}} = i (X_1 + X_{\text{выс}}) \quad (8.64)$$

— реактивная составляющая, которая определяется как полем основного, так и полями высших типов.

Активная составляющая $R_{\text{вх}}$ характеризует средний расход энергии, поступающей из коаксиального фидера в волновод. Реактивная составляющая $X_{\text{вх}}$ характеризует пульсации энергии, не связанные с переносом активной мощности. Формула (8.61) впервые была получена И. И. Вольманом методом зеркальных изображений, а выражение для активной составляющей (8.63) найдено несколько ранее А. Л. Дробкиным методом наведённых эдс.

Формула (8.61) позволяет проанализировать вопрос о согласовании штыря с фидером. Согласование состоит в том, что активное

входное сопротивление штыря $R_{вх}$ делается равным волновому сопротивлению фидера $\rho_{ф}$, а суммарное реактивное сопротивление $X_{вх} = X_1 + X_{выс}$ доводится до нуля. Представляет интерес поэтому выяснить, как зависит каждая из составляющих входного сопротивления штыря от параметров возбуждающего устройства.

Составляющие входного сопротивления, обусловленные основным типом волны, в значительной мере зависят как от положения штыря в поперечном сечении, так и от расстояния l между штырём и короткозамкнутым концом волновода. На рис. 8.19 пред-

ставлены графики изменения составляющих $R_1 = R_{вх}$ и $X_1 = X_{вх} - X_{выс}$ в зависимости от координаты y_0 , характеризующей положение штыря в поперечном сечении. Обе представленные на

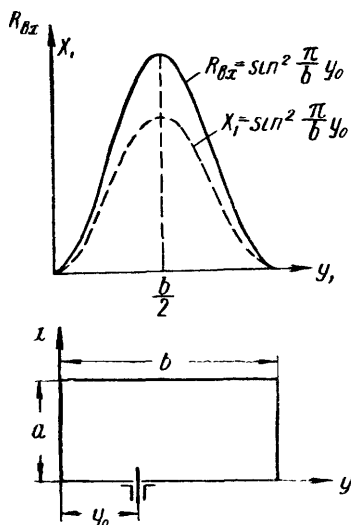


Рис. 8.19. Изменение составляющих входного сопротивления штыря при перемещении его вдоль широкой стенки

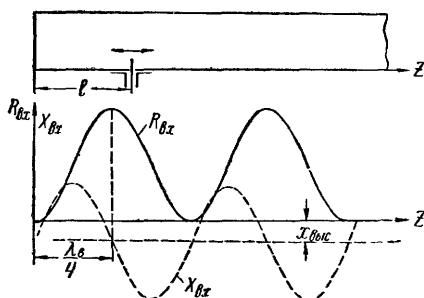


Рис. 8.20. Изменение составляющих входного сопротивления штыря в зависимости от расстояния l до короткозамыкающего поршня

рисунке составляющие изменяются по закону $\sin^2 \frac{\pi}{b} y_0$ и достигают максимального значения, когда штырь расположен посредине широкой стенки и связь штыря с электромагнитным полем в волноводе наибольшая.

На рис. 8.20 представлены графики изменения составляющих входного сопротивления $R_{вх}$ и $X_{вх}$ в зависимости от расстояния l между поршнем и штырём. В целях большей наглядности на рис. 8.20 показано перемещение штыря относительно короткозамкнутого конца волновода, хотя обычно расстояние l регулируется путём перемещения короткозамыкающего поршня. В зависимости от расстояния l активная составляющая $R_{вх} = R_1$ изменяется по закону $\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_g} l$. Она достигает максимального значения, когда расстояние l между штырём и короткозамыкающим поршнем сос-

тавляет нечётное число четвертей длин волн в волноводе и обращается в нуль, если расстояние l равно чётному числу четвертей длин волн (целому числу полуволн) в волноводе. Реактивная составляющая $X_{вх}$ складывается из составляющей X_1 , обусловленной основным типом волны, и составляющей $X_{выс}$, обусловленной высшими типами волн. Реактивная составляющая X_1 изменяется в зависимости от расстояния l по закону $\sin \frac{4\pi}{\lambda_g} l$, имеет максимальные (по абсолютной величине) значения, когда l равно нечётному числу $\lambda_g/8$, и обращается в нуль, когда составляющая $R_{вх}$ достигает максимума или минимума.

Составляющая $X_{выс}$, учитывающая реактивную мощность, расходуемую на создание полей высших типов волн, нуждается в

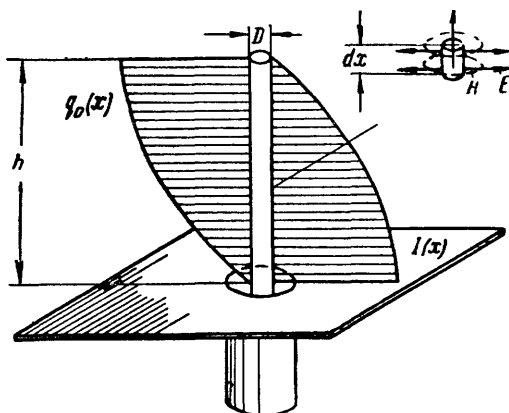


Рис. 8.21. Распределение заряда и тока по штырю и структура поля в окрестности элемента длины штыря

специальном рассмотрении. Если сопротивление $R_1 + iX_1$ учитывает ответвляющуюся от штыря полную мощность, то сопротивление $iX_{выс}$ характеризует реактивную мощность, идущую на поддержание местного поля в окрестности штыря. Величина этого реактивного сопротивления зависит от диаметра D и высоты h штыря.

Если штырь тонкий, то поле в его окрестности описывается путём наложения большого числа высших типов волн (см. § 2.13). Структура местного поля в окрестности штыря близка в этом случае к структуре статического поля распределённых по нему зарядов и токов (рис. 8.21). Аналогия со статикой касается только распределения поля поперёк штыря, считая распределение зарядов и токов заданным. Само же распределение зарядов и токов устанавливается вдоль штыря как вдоль системы с распределёнными параметрами. Значительно отличаясь от статического, это распределение имеет сходство с распределением поля вдоль длин-

ной линии, разомкнутой на конце ¹⁾. Как и в длинной линии, оно должно быть неравномерным в связи с наложением волны, отражённой от разомкнутого конца, и волны, поступающей из коаксиального фидера. При этом, однако, не получается чисто стоячей волны, так как штырь по своему принципу действия представляет устройство, направляющее энергию, которая, ответвляясь по всей длине штыря, распространяется далее по волноводу (рис. 8.16). Таким образом, штырь следует уподобить скорее *разомкнутому на конце отрезку неоднородной длинной линии с потерями*. Однако для качественной оценки структуры поля вблизи штыря можно не учитывать влияния ответвляемой мощности. Пренебрегая далее неоднородностью параметров, реактивное сопротивление $iX_{\text{выс}}$ можно уподобить входному сопротивлению отрезка *однородной* длинной линии *без потерь, разомкнутому на конце*. Отсюда становится понятным, что при высоте штыря $h < \lambda/4$ реактивное сопротивление $iX_{\text{выс}}$ имеет ёмкостный характер ($X_{\text{выс}} < 0$), при $h > \lambda/4$ — индуктивный ($X_{\text{выс}} > 0$), при $h \approx \lambda/4$ — обращается в нуль ($X_{\text{выс}} = 0$). Ввиду того, что входное сопротивление реактивного отрезка линии пропорционально волновому, абсолютное значение $X_{\text{выс}}$ тем меньше, чем толще штырь. Вследствие концентрации местного поля у провода перемещение штыря вдоль и поперёк волновода мало сказывается на величину $X_{\text{выс}}$, пока штырь не приближается к проводящим стенкам. Поэтому на рис. 8.20 график $X_{\text{выс}}$ показан в виде горизонтальной прямой, не доведённой до закороченного конца волновода; не доведена до конца и суммарная кривая $X_{\text{вх}} = X_1 + X_{\text{выс}}$.

Основываясь на анализе составляющих входного сопротивления штыря [ф-ла (8.61)], нетрудно ответить на вопрос о том, как обеспечить выполнение условий согласования $X_1 + X_{\text{выс}} = 0$ и $R_{\text{вх}} = \rho_0$. Чтобы обеспечить выполнение обоих условий, необходимо подбирать не менее *двух параметров* возбуждающего устройства, например, высоту штыря h и расстояние l до короткозамыкающего поршня. Хотя в серийной аппаратуре такая регулировка производится на заводе, однако в волноводных элементах измерительных приборов и приёмных устройств часто предусматривается возможность последующей регулировки за счёт перемещения короткозамыкающего поршня.

Чтобы сделать согласование более диапазонным, желательно уменьшить по абсолютной величине порознь как X_1 , так $X_{\text{выс}}$, поскольку именно реактивные сопротивления наиболее сильно зависят от частоты. Снижение величины $X_{\text{выс}}$ достигается путём плавного *увеличения диаметра штыря* за счёт придания ему специальной пестиковой формы (рис. 8.22) и приближения высоты штыря к резонансной. Снижение X_1 может быть достигнуто пу-

¹⁾ Предполагается, что расстояние от штыря до верхней стенки много больше диаметра штыря. В противном случае следует говорить о линии, нагруженной на ёмкость.

тём подбора расстояния l между штырём и поршнем. Повышение R_1 , которое имеет место при увеличении его высоты h , может быть скомпенсировано за счёт *смещения штыря* из центра поперечного сечения, что часто встречается в аппаратуре. Делается это в целях лучшего согласования. Разновидностью пестиковой

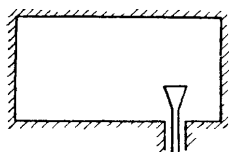


Рис. 8.22. Штырь пестиковой формы, эксцентрично расположенный в поперечном сечении волновода

конструкции является *пуговичная* конструкция, показанная ранее на рис. 6.15 и используемая при подключении волновода к магнетрону с коаксиальным выводом энергии. Эта конструкция отличается большей плавностью перехода от коаксиального фидера к волноводу, за счёт чего уменьшается отражение от конца штыря. Тем самым наряду с увеличением диапазона уменьшается опасность электрического пробоя и возрастает допустимая мощность в узле сопряжения волновода с магнетроном.

Перейдём к рассмотрению экспериментальных данных, полученных при измерении входных сопротивлений штырей в волновод по опытам А. Д. Дикого. На рис. 8.23 представлены результаты измерений входных сопротивлений

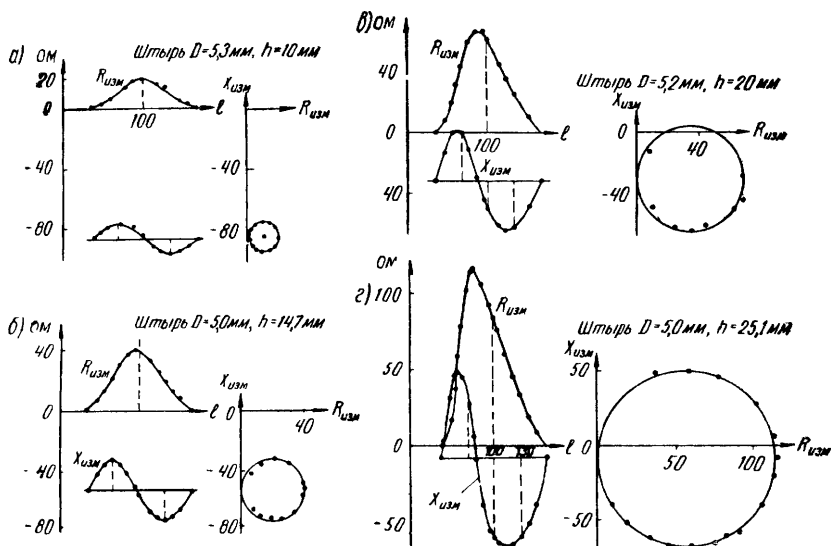


Рис. 8.23. Экспериментальные кривые изменения активной и реактивной составляющих входного сопротивления штыря в зависимости от расстояния l между штырём и короткозамыкающим поршнем

цилиндрических штырей при различных значениях расстояния l до короткозамыкающего поршня. Приведены экспериментальные кривые $R_{взм}(l)$ и $X_{взм}(l)$ для различных значений высоты штыря h . Для каждого значения l показаны, кро-

ме того, кривые, описываемые точкой $Z_{изм} = R_{изм} + iX_{изм}$ на плоскости комплексного сопротивления; как видно из рисунка, для всех рассмотренных случаев эти кривые представляют собой окружности. Приведённые экспериментальные данные относятся к прямоугольному волноводу с внутренними размерами $a = 3,4 \text{ см}$ $b = 7,2 \text{ см}$, при длине волны $\lambda = 10,2 \text{ см}$ и диаметре отверстия, через которое вводится штырь, $D_{отв} = 1,5 \text{ см}$. Для коротких штырей $h < \frac{\lambda}{4}$

экспериментальные кривые (рис. 8.23а и б) хорошо совпадают с теоретическими. Для более длинных штырей $h \approx \frac{\lambda}{4}$ кривые (рис. 8.23в, г) искажаются. Максимум $R_{изм}$ соответствует при этом $l < \frac{\lambda}{4}$, когда реактивная часть входного

сопротивления является индуктивной. А. Д. Дикий объясняет это явление влиянием ёмкости отверстия для ввода штыря $C_{отв}$, не учтённой ранее в ходе расчёта, но учтённой на эквивалентной схеме (рис. 8.24), резонанс которой имеет место при индуктивном характере $Z_{вх}$. На рис. 8.25 а, б, в показаны экспериментальные кривые для $R_{вх}$, $X_{выс}$ и $X_C =$

$\frac{1}{\omega C_{отв}}$, в зависимости от длины штыря для различных значений его диаметра. Штриховыми линиями показаны теоретические кривые для $R_{вх}$ при равномерном и синусоидальном распределении тока по штырю (рис. 8.25а). Как видно из рисунка, экспериментальные кривые для $R_{вх}$ при различных значениях диаметра штыря близки к теоретической кривой для идеально тонкого штыря при синусоидальном распределении тока, но всё же несколько отличаются от неё. Кривые для $X_{выс}$, показанные на

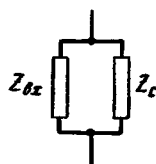


Рис. 8.24. Эквивалентная схема для расчёта входного сопротивления штыря с учётом ёмкости отверстия

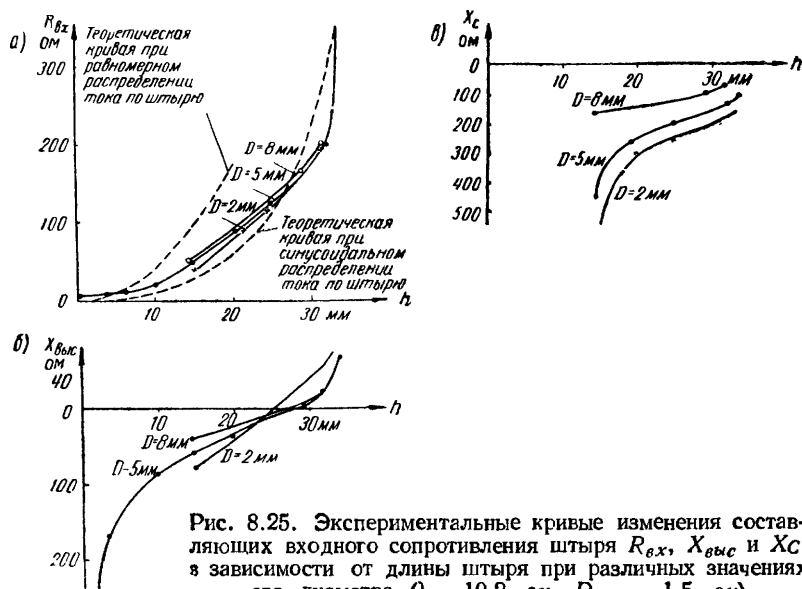


Рис. 8.25. Экспериментальные кривые изменения составляющих входного сопротивления штыря $R_{вх}$, $X_{выс}$ и X_C в зависимости от длины штыря при различных значениях его диаметра ($\lambda = 10,2 \text{ см}$, $D_{отв} = 1,5 \text{ см}$)

рис. 8.25б, подтверждают, что резонансная длина штыря равна четверти длины волны и что с увеличением диаметра штыря реактивное сопротивление $X_{выс}$

уменьшается по абсолютной величине. Кривые для ёмкостного шунтирующего сопротивления X_C показывают, что влияние последнего нужно учитывать только для достаточно длинных штырей.

§ 8.12. ОСОБЕННОСТИ РЕГУЛИРОВКИ ВОЗБУЖДАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ПРИ ВОЛНЕ H_{01}

Обычно геометрические размеры штыря бывают заданы и не подлежат дальнейшему изменению. Подстройка возбуждающего устройства, которая используется в ряде конструкций, производится путём перемещения короткозамыкающего поршня (рис. 8.26а). Рассмотрим физические процессы при такой подстройке, пользуясь эквивалентной схемой (рис. 8.26б), в которой

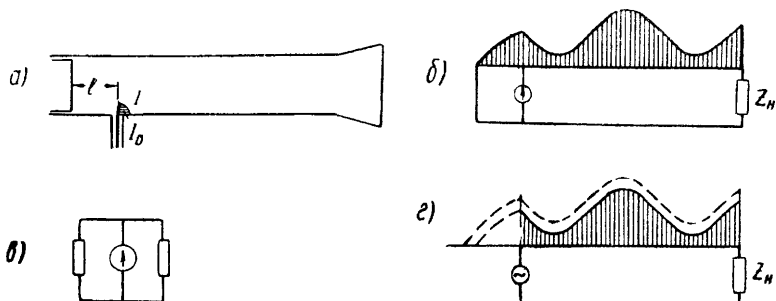


Рис. 8.26. Пояснение особенностей подстройки возбуждающего устройства при перемещении короткозамыкающего поршня

волновод со штырём заменён эквивалентной линией с генератором тока. Скалярная комплексная амплитуда электрического поля в сечении штыря определяется при этом как напряжение на двух параллельно включённых сопротивлениях, представляющих собой входные сопротивления отрезков линии (рис. 8.26в). Это напряжение можно, в свою очередь, рассматривать как эквивалентную эдс для нагруженного отрезка линии (рис. 8.26г).

Величина эквивалентной эдс *будет меняться при изменении расстояния l* . Одна из причин этого состоит в изменении нагрузки для генератора тока за счёт изменения входного сопротивления короткозамкнутого отрезка линии. Вторая причина заключается в изменении тока у основания штыря, в связи с чем меняется и ток генератора в эквивалентной линии. Действительно, ток у основания штыря является током нагрузки для подводящего к нему энергию коаксиального фидера. Поскольку при изменении расстояния l меняется входное сопротивление штыря, будет меняться и режим коаксиального фидера, а значит, и ток у основания штыря.

Одновременно с изменением эквивалентной эдс в сечении штыря пропорционально изменяются значения амплитуд поля на участке от штыря до нагрузки (рис. 8.26г). При определённых

значениях l можно добиться *оптимальной* передачи энергии в нагрузку. При некоторых значениях (например, при $l=0$, $l=\lambda_g/2$, $l=\lambda_g$) входное сопротивление короткозамкнутого отрезка в сечении штыря равно нулю и энергия в нагрузку поступать не будет (в коаксиальном фидере при этом имеет место режим стоячей волны).

При перемещении поршня могут меняться координаты узлов и пучностей поля между штырём и поршнем. Это не касается координат максимумов и минимумов поля, а также значения коэффициента бегущей волны на участке между штырём и нагрузкой. Они остаются неизменными, поскольку определяются не свойствами источника, возбуждающего линию (рис. 8.26г), а свойствами нагрузки. В коаксиальном же фидере, питающем штырь, изменение положения поршня вызывает как изменение амплитуд поля, так и изменение координат максимумов и минимумов, а также коэффициента бегущей волны.

Обычно оптимальное расстояние от короткозамыкающего поршня до штыря близко к нечётному числу четвертей длин волн в волноводе.

§ 8.13. ВХОДНЫЕ ПРОВОДИМОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ ЩЕЛЕЙ В ВОЛНОВОДЕ

Входная проводимость щели вводится как расчётный коэффициент, характеризующий затрату мощности на возбуждение волновода заданным полем в щели. Входная проводимость была определена выше (§ 8.1) как отношение удвоенной полной мощности $\dot{P}$, подводимой к щели, к квадрату амплитуды напряжения U_{0m} на щели в пучности напряжения

$$Y_{вх} = \frac{2 \dot{P}}{U_{0m}^2}.$$

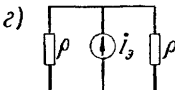
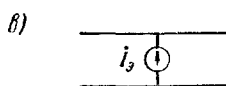
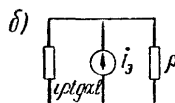
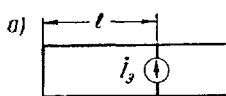
Ниже приведены примеры расчёта активной составляющей входной проводимости

$$G_{вх} = \frac{2 P_a}{U_{0m}^2}, \quad (8.65)$$

где P_a — активная мощность, расходуемая (в обычных условиях работы) на возбуждение основного типа колебаний.

Пример 1. Найти активную составляющую входной проводимости продольной щели в волноводе. Раздельно рассмотреть два случая: 1) когда волновод согласован с одной стороны и закорочен с другой; 2) когда волновод согласован с двух сторон. Получить расчётные формулы для случая волны H_{01} в прямоугольном волноводе.

На рис. 8.27а показана эквивалентная схема волновода в виде линии, закороченной с одного конца и согласованной с другой, с включенным в эту линию генератором тока. Заменяя отрезки линии эквивалентными сопротивлениями (рис. 8.27б) и пользуясь правилом параллельного соединения сопротивлений, легко определить активную мощность, расходуемую на возбуждение волны основного типа,



$$P_a = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} I_{\text{эт}}^2 Z_{\text{э}} \right) = \frac{1}{2} I_{\text{эт}}^2 \rho \sin^2 \alpha l. \quad (8.65)$$

Зная мощность P_a , легко рассчитать активную проводимость продольной щели

$$G_{\text{дх}} = \frac{2 P_a}{U_{0m}^2} = G_{\text{макс пр}} \sin^2 \alpha l, \quad (8.66)$$

где

$$G_{\text{макс пр}} = \left(\frac{I_{\text{эт}}}{U_{0m}} \right)^2 \rho \quad (8.67)$$

— максимальное значение активной составляющей входной проводимости продольной щели, которое имеет место, когда расстояние от центра щели до отражающего поршня равно нечетному числу четвертей длин волн в волноводе.

Для случая согласованного с двух сторон волновода, пользуясь эквивалентными схемами (рис. 8.27в и г), можно соответственно получить:

$$P_a = \frac{1}{2} I_{\text{эт}}^2 \frac{\rho}{2}$$

и

$$G_{\text{дх}} = \frac{2 P_a}{U_{0m}^2} = \frac{G_{\text{макс пр}}}{2}. \quad (8.68)$$

Определяя величину отношения $\left| \frac{I_{\text{эт}}}{U_{0m}} \right| = \left| \frac{I_0}{U_0} \right|$ из соотношений (8.48) и (8.49) и подставляя далее значение $\rho = \rho_H = 120 \pi \lambda_g / \lambda$, находим величину $G_{\text{макс пр}}$:

а) для щели в широкой стенке прямоугольного волновода

$$G_{\text{макс пр}} = \frac{1}{15 \pi^3} \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{b}{a} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g} \cos^2 \frac{\pi}{b} y_0, \quad (8.69)$$

где y_0 — координата щели,

б) для щели в узкой стенке прямоугольного волновода

$$G_{\text{макс пр}} = \frac{1}{15 \pi^3} \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{b}{a} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g}. \quad (8.70)$$

Пример 2. Найти активную составляющую входной проводимости поперечной щели в прямоугольном волноводе, закороченном с одной стороны и согласованном с другой.

¹⁾ Здесь $Z_{\text{э}}$ определяется так же, как и при выводе ф-лы (8.57).

Используя эквивалентные схемы (рис. 8.28), находим активную мощность, отдаваемую щелью в волновод,

$$P_a = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \dot{E}_z \left(\frac{E_z}{\rho + i \rho \operatorname{tg} \alpha l} \right)^* \right\} = \frac{E_{zm}^2}{2 \rho} \cos^2 \alpha l.$$

Зная мощность P_a , легко рассчитать активную проводимость поперечной щели

$$G_{вх} = \frac{2 P_a}{U_{0m}^2} = G_{\max \text{ попер}} \cos^2 \alpha l, \quad (8.71)$$

где $G_{\max \text{ попер}}$ — максимальное значение активной входной проводимости поперечной щели

$$G_{\max \text{ попер}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{E_{zm}}{U_{0m}} \right)^2, \quad (8.72)$$

которое имеет место, когда расстояние от центра щели до отражающего поршня равно целому числу полуволн в волновод.

Определяя отношение $\frac{E_{zm}}{U_{0m}} = \left| \frac{\dot{E}_z}{U_0} \right|$ из соотношения (8.51) и заменяя $\rho = \rho_H = 120 \pi \lambda_g / \lambda$, находим для прямоугольного волновода

$$G_{\max \text{ попер}} = \frac{1}{60 \pi^2} \frac{\lambda_g^3}{a b \lambda} \cos^2 \frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{b} \sin^2 \frac{\pi}{b} y_0, \quad (8.73)$$

где y_0 — координата центра щели.

§ 8.14. РАСЧЕТ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА СВЯЗИ СО СЛАБОНАГРУЖЕННЫМ РЕЗОНАТОРОМ

Предположим, что резонатор (рис. 8.29а), работая в режиме вынужденных колебаний на резонансной частоте, связан с генератором и нагрузкой штырями. На рис. 8.29б показана эквивалентная схема, пользуясь которой можно провести расчёт для произвольно нагруженного резонатора. Величина эквивалентного сопротивления нагрузки $Z_{нэ}$ в этой схеме определяется как

$$Z_{нэ} = \frac{2 \dot{P}_н}{I_{нэ}^2},$$

где $\dot{P}_н$ — полная мощность, идущая в нагрузку,

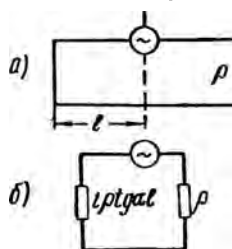


Рис. 8.28. Эквивалентные схемы для поперечных щелей

$I_{\text{нат}}$ — амплитуда эквивалентного тока нагрузки, т. е. тока у основания штыря, пересчитанного соответственно соотношению (8.45).

Резонатор будем считать слабо нагруженным, если $Z_{\text{нз}} \gg \rho$ и включение нагрузки практически не меняет распределения поля вдоль оси z . В этом случае расчёт значительно упрощается, так как нет необходимости учитывать влияние нагрузки на структуру

поля в резонаторе и можно проводить расчёт по методу наведённых эдс.

В частности, проведём расчёт при активной нагрузке и на резонансной частоте, когда входное сопротивление активно: $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}}$. Для этого, исходя из структуры поля в ненагруженном резонаторе при произвольно выбранной интенсивности поля, находим амплитуды эдс, наводимые во входном и нагрузочном штырях $E_{\text{вх} \text{ м}} h_{\text{д вх}}$ и $E_{\text{нз}} h_{\text{дн}}$, где $E_{\text{вх} \text{ м}}$ и $E_{\text{нз}}$ — амплитуды составляющих напряжённости

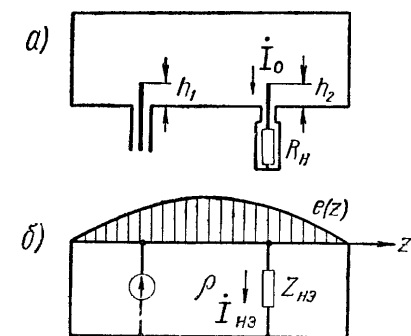


Рис. 8.29. Иллюстрация работы слабонагруженного резонатора

электрического поля вдоль входного и нагрузочного штырей, $h_{\text{д вх}}$ и $h_{\text{дн}}$ — действующие высоты этих штырей. Составляя баланс активных мощностей, поступающих в резонатор и в нагрузку, получим

$$\frac{(E_{\text{вх} \text{ м}} h_{\text{д вх}})^2}{2 R_{\text{вх}}} = \frac{(E_{\text{нз}} h_{\text{дн}})^2}{2 R_{\text{н}}}, \quad (8.74)$$

откуда

$$R_{\text{вх}} = R_{\text{н}} \left(\frac{E_{\text{вх} \text{ м}} h_{\text{д вх}}}{E_{\text{нз}} h_{\text{дн}}} \right)^2. \quad (8.75)$$

Подобный же расчёт для витков будет отличаться выражениями для амплитуд эдс, наводимых в витках, $\omega \mu_0 H_{\text{вх} \text{ м}} S_{\text{вх}}$ и $\omega \mu_0 H_{\text{нз}} S_{\text{н}}$, где $H_{\text{вх} \text{ м}}$ и $H_{\text{нз}}$ — амплитуды составляющих напряжённости магнитного поля, нормальных виткам, $S_{\text{вх}}$ и $S_{\text{н}}$ — площади витков. Тогда

$$R_{\text{вх}} = R_{\text{н}} \left(\frac{H_{\text{вх} \text{ м}} S_{\text{вх}}}{H_{\text{нз}} S_{\text{н}}} \right)^2. \quad (8.76)$$

С учётом малых потерь в стенках выражение (8.74) видоизменяется

$$\frac{(E_{\text{вх} \text{ м}} h_{\text{д вх}})^2}{2 R_{\text{вх}}} = \frac{(E_{\text{нз}} h_{\text{дн}})^2}{2 R_{\text{н}}} + P_{\text{н}},$$

где $P_{\text{н}}$ — активная мощность потерь в стенках.

Тогда

$$\frac{1}{R_{ex}} = \frac{1}{R_n} \left(\frac{E_{nm} h_{\partial n}}{E_{exm} h_{\partial ex}} \right)^2 + \frac{2 P_n}{(E_{exm} h_{\partial ex})^2}. \quad (8.77)$$

Разумеется, что рассчитанное по этой формуле сопротивление не зависит от интенсивности поля, так как если каждая из напряжённостей поля изменится в a раз, то мощность P изменится в a^2 раз. Формулы (8.75), (8.76) и (8.77) были найдены А. Л. Драбкиным.

Расчёт, проведённый в данном параграфе, применим и к резонаторам произвольной формы, например к тороидальным.

§ 8.15. РАСЧЕТ ПРОДОЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С ИСТОЧНИКАМИ

Функции $\dot{e}(\mathbf{z})$ и $\dot{h}(\mathbf{z})$, определяемые как решения дифференциальных уравнений (8.35) и (8.36), характеризуют закон распределения поперечных составляющих поля E и H . Продольные составляющие сравнительно просто выражаются через поперечные. Например, из уравнения (8.22б) после разделения векторов на продольные и поперечные [как это сделано для уравнения (3.31)] получим

$$[\nabla_s H_s] = i \omega \epsilon E_z + j_z,$$

откуда

$$E_z = \frac{1}{i \omega \epsilon} [\nabla_s H_s] - \frac{1}{i \omega \epsilon} j_z. \quad (8.78)$$

Нетрудно найти и скалярные комплексные амплитуды $\dot{\rho}_n(\mathbf{z})$, характеризующие закон распределения продольных составляющих электрического поля для каждого типа волны. Используя соотношения (8.3) и (7.13), получим

$$\sum_n \dot{\rho}_n(\mathbf{z}) \mathbf{f}_n(x, y) = \sum_n \rho_n \dot{h}_n(\mathbf{z}) \mathbf{f}_n(x, y) - \frac{1}{i \omega \epsilon} j_z.$$

Умножая на $\mathbf{f}_n(x, y)$ и интегрируя по сечению волновода для волн типа E в силу (8.7) и (8.16), находим

$$\frac{k_n^2}{\gamma_n^2} \dot{\rho}_n(\mathbf{z}) = \frac{k_n^2}{\gamma_n^2} \rho_n \dot{h}_n(\mathbf{z}) - \frac{1}{i \omega \epsilon} \int_{S_{\text{попер}}} j_z \mathbf{f}_n(x, y) dS. \quad (8.79)$$

Опуская индекс n и учитывая, что для волн типа E значение $\rho = \gamma / i \omega \epsilon$, а скалярное произведение $j_z \mathbf{f} = \mathbf{j} \mathbf{f}$, найдём

$$\dot{\rho}(\mathbf{z}) = \rho \left[\dot{h}(\mathbf{z}) - \frac{\gamma}{k^2} \int \mathbf{j} \mathbf{f} dS \right]. \quad (8.80)$$

Это и есть искомое выражение $p(z)$ для волн типа E .
 Для волн типа H аналогично (8.80) можно получить ¹⁾

$$\dot{q}(z) = \frac{1}{\rho} \left[\dot{e}(z) - \frac{\gamma}{k^2} \oint [nE] g dl \right].$$

В качестве примера использования найденных выражений остановимся на возбуждении волн типа E осевым током, что имеет место в электронных приборах бегущей волны. Дифференцируя ур-ние (8.35) и исключая $\frac{d\dot{e}}{dz}$ при помощи ур-ния (8.36), а также учитывая соотношения (8.34), (8.37), (8.31), (8.32), получим

$$\frac{d^2 \dot{h}}{dz^2} - \gamma^2 \dot{h} = -\gamma \int j f dS. \quad (8.81)$$

Заменяя входящую в это уравнение функцию $\dot{h}(z)$ через $\dot{p}(z)$ при помощи соотношения (8.80) и учитывая, что $k^2 - \gamma^2 = \omega^2 \epsilon_0 = \alpha_0^2$, найдём

$$\frac{d^2 \dot{p}}{dz^2} - \gamma^2 \dot{p} = -\frac{\gamma}{k^2} \rho_E \left(\alpha_0^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int j f dS. \quad (8.82)$$

Условимся, что ток протекает в области, для которой $f(x, y)$ имеет постоянное значение, например $f(x_0, y_0)$. Тогда $\int j f dS = \dot{I}(z)$, где $\dot{I}(z)$ — комплексная амплитуда осевого тока в сечении z . Если имеет место только один распространяющийся тип волны, пренебрегая другими типами, найдём дифференциальное уравнение для значений $\dot{E}_z = \dot{E}_z(x_0, y_0, z) = \dot{p}(z) f(x_0, y_0)$ вдоль осевого тока

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} - \gamma^2 \dot{E}_z = -\gamma \rho_s \left(\alpha_0^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \dot{I}(z), \quad (8.83)$$

где ρ_s — эквивалентное волновое сопротивление

$$\rho_s = \rho_E \frac{f^2(x_0, y_0)}{k^2}. \quad (8.84)$$

Дифференциальное ур-ние (8.83) имеет важное значение в теории электронных приборов бегущей волны и будет использовано в гл. 10.

¹⁾ Для этого в ур-ние (8.22a) можно ввести плотность магнитного тока $\dot{J}_M$, поверхностный интеграл от которой сводится к контурному от плотности поверхностного магнитного тока $[nE]$. Тот же результат можно получить, не вводя магнитного тока, но (с учётом разрывов непрерывности вектора E на контуре волновода) не допуская прямого интегрирования ряда как при выводе (8.79). При этом ур-ние (8.22a) умножается скалярно на g , производится замена $g \operatorname{rot} H = \operatorname{div} [Hg] + H \operatorname{rot} g$ и используется теорема Гаусса.

§ 8.16. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОДА С ИСТОЧНИКАМИ ПРИ УЧЕТЕ ПОТЕРЬ

Дифференциальные ур-ния (8.35) и (8.36), лежащие в основе теории возбуждения волноводов без потерь, можно использовать при анализе распространения волн в волноводе с потерями. Учтём, во-первых, потери в стенках, за счёт которых создаётся напряжённость поля у стенок $\dot{\mathbf{E}} = Z_S [\mathbf{n}\dot{\mathbf{H}}]$, где $Z_S = R_S + iX_S = R_S(1+i)$, и потери в диэлектрике, связанные с протеканием токов проводимости плотностью $\dot{\mathbf{j}} = \sigma_0 \dot{\mathbf{E}}$ внутри волновода. Используя метод последовательных приближений, выразим входящие в написанные выражения значения $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ по формулам регулярного волновода без потерь, в котором распространяется один тип волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{e}(z) \mathbf{F}(x, y) + \rho \dot{h}(z) \mathbf{f}(x, y) \\ \dot{\mathbf{H}} &= \dot{h}(z) \mathbf{G}(x, y) + \frac{1}{\rho} \dot{e}(z) \mathbf{g}(x, y) \end{aligned} \right\}. \quad (8.85)$$

Подставляя значения $\dot{\mathbf{j}} = \sigma_0 \dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{E}} = Z_S [\mathbf{n}\dot{\mathbf{H}}]$ в ф-лы (8.31) и (8.32) для $\dot{\gamma}(z)$ и $\dot{e}(z)$ и производя преобразования, дифференциальные ур-ния (8.35) и (8.36) представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{h}}{dz} &= -\dot{e} \left(Y_0 + \sigma_0 \int F^2 dS + \frac{Z_S}{\rho^2} \oint g^2 dl \right) \\ \frac{d\dot{e}}{dz} &= -\dot{h} \left(Z_0 - \sigma_0 \rho^2 \int f^2 dS - Z_S \oint G^2 dl \right) \end{aligned} \right\}. \quad (8.86)$$

Решение системы ур-ний (8.26) характеризуется зависимостью $\dot{e}$ и $\dot{h}$ от z вида $e^{-\Gamma z}$, где Γ — *видоизменённое значение постоянной распространения с учётом потерь*

$$\begin{aligned} \Gamma &= i\alpha' + \beta = \\ &= \sqrt{\left(Y_0 + \sigma_0 \int F^2 dS + \frac{Z_S}{\rho^2} \int g^2 dl \right) \left(Z_0 - \sigma_0 \rho^2 \int f^2 dS - Z_S \int G^2 dl \right)}. \end{aligned} \quad (8.87)$$

В частности, для волн типа H , когда $f(x, y) = 0$, с учётом соотношений (8.11), (8.34), (8.37) получим

$$\Gamma = \sqrt{\left(\gamma + \sigma_0 \rho + \frac{Z_S}{\rho} \int g^2 dl \right) \left(\gamma - \frac{Z_S}{\rho} \int G^2 dl \right)}. \quad (8.88)$$

Формулы (8.87) и (8.88) применимы при любых значениях γ , в том числе и при $\gamma \approx 0$, т. е. в окрестности критической частоты.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ВОЛНОВОДАХ. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

§ 9.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Любой волноводный тракт содержит обычно ряд неоднородных элементов, стоящих на пути распространяющейся по волноводу волны, а именно:

1) Устройства, предназначенные для вывода энергии из волновода, или иначе *выводные устройства*. К числу таких устройств относятся: рупор, или щелевая антенна, излучающие энергию в свободное пространство; приёмный штырь, подводящий энергию к коаксиальному кабелю или к кристаллическому детектору, и т. п.

2) Устройства, предназначенные для согласования нагрузки с волноводом и волновода с питающим его генератором, или иначе *согласующие устройства*. В качестве примера таких устройств следует указать на волноводные диафрагмы, представляющие собой тонкие поперечные проводящие перегородки, частично перекрывающие сечение волновода. Ряд других видов согласующих устройств будет описан ниже.

3) *Волноводные разветвления*, предназначенные для распределения электромагнитной энергии между отдельными волноводными линиями.

4) *Изгибы и изломы волновода*, неизбежно встречающиеся на протяжении волноводного тракта в реальных условиях его монтажа.

5) *Скрученные участки волновода*, которые используются в тех случаях, когда требуется получить нужный вид поляризации (горизонтальную или вертикальную) на выходе излучающего устройства.

6) *Участки волновода с переменным сечением*, используемые в качестве рупоров, а также промежуточных согласующих элементов; участки с вмятинами на стенках волновода.

7) *Соединения отдельных секций волновода*, на которые разбивается волноводный тракт для облегчения монтажа, эксплуатации и ремонта.

Кроме перечисленных выше, неоднородными элементами волноводного тракта являются также возбуждающие устройства, рас-

смотренные в предыдущей главе, участки со скоплениями влаги на стенках или же участки волновода, заполненные неизотропной средой (намагниченным ферритом), которые будут рассмотрены в гл. 11. Пока же в пределах данной главы, как и в предыдущих главах, среда, заполняющая волновод, считается изотропной.

Математическое исследование структуры поля на неоднородных участках волновода является в достаточной мере сложным. Однако основной интерес представляет обычно не структура электромагнитного поля вблизи неоднородности, а *влияние неоднородного участка на режим работы в примыкающих к нему однородных участках волновода*.

Задача при этом упрощается, потому что закон распределения поля вдоль произвольного однородного участка волновода подчиняется для каждого типа волн дифференциальному уравнению однородной длинной линии. Поскольку обычно по однородному участку волновода распространяется только один вид волны, распределение поля вдоль него определяется по эквивалентной схеме для этого единственного вида волны.

На рис. 9.1а изображён волновод с неоднородным участком. Предполагается, что граничные плоскости I и II этого участка проведены за пределами области местного поля там, где электромагнитное поле описывается основным видом волны. Соответствующие скалярные комплексные амплитуды в сечениях I и II обозначим $\dot{e}_1, \dot{h}_1, \dot{e}_2$ и $\dot{h}_2$. Связь между этими скалярными комплексными амплитудами — *линейная*, в силу линейности исходных дифференциальных уравнений электромагнитного поля. Поэтому можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_1 &= A\dot{e}_2 + B\dot{h}_2 \\ \dot{h}_1 &= C\dot{e}_2 + D\dot{h}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (9.1)$$

где A, B, C, D , — постоянные коэффициенты, которые зависят от свойств неоднородного участка. Уравнения (9.1) являются уравнениями *линейного пассивного*¹⁾ *четырёхполюсника*, который заменяет неоднородный участок в эквивалентной схеме (рис. 9.1б) и включён на схеме между двумя однородными участками эквивалентной длинной линии.

На рис. 9.2а изображена несколько более сложная неоднородность, представляющая собой объём V , к которому присоединено

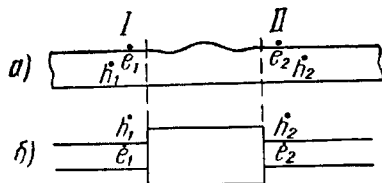


Рис. 9.1. Волновод с неоднородным участком и его эквивалентная схема

¹⁾ Пассивным называется четырёхполюсник, не содержащий источников энергии.

несколько волноводов. Если провести граничные плоскости за пределами области высших типов волн, всё волноводное разветвление в целом может быть заменено эквивалентной схемой в виде *многополюсника* с присоединёнными к нему длинными линиями (рис. 9.2б).

Таким образом, свойства неоднородностей (рис. 9.1а и б) по отношению к внешним участкам волновода описываются параметрами эквивалентных четырёхполюсников и многополюсников, которые могут быть определены экспериментальным путём, а в ряде случаев путём расчёта

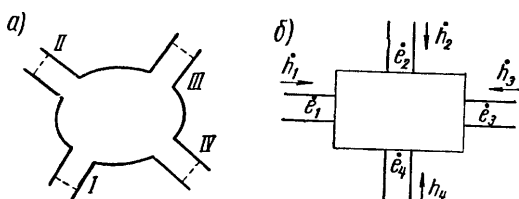


Рис. 9.2. Волноводное разветвление и его эквивалентная схема

Ниже иллюстрируются исходные теоретические соображения, лежащие в основе экспериментального и расчётного определений параметров неоднородностей в изотропных волноводах, а также рассматриваются типичные неоднородности, используемые в технике свч.

§ 9.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАССИВНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИХ ПАРАМЕТРОВ

Наряду с системой ур-ний (9.1) для характеристики четырёхполюсника можно использовать одну из следующих двух систем уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_1 &= Z_{11}\dot{h}_1 + Z_{12}\dot{h}_2 \\ \dot{e}_2 &= Z_{21}\dot{h}_1 + Z_{22}\dot{h}_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_1 &= Y_{11}\dot{e}_1 + Y_{12}\dot{e}_2 \\ \dot{h}_2 &= Y_{21}\dot{e}_1 + Y_{22}\dot{e}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (9.3)$$

Коэффициенты Z_{11} и Z_{22} называют *собственными сопротивлениями*, Z_{12} и Z_{21} — *взаимными сопротивлениями*, Y_{11} и Y_{12} — *собственными проводимостями*, Y_{12} и Y_{21} — *взаимными проводимостями*. Согласно теореме взаимности:

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad Y_{12} = Y_{21}. \quad (9.4)$$

При замене взаимных сопротивлений или проводимостей через коэффициенты A , B , C , и D условие взаимности принимает вид $BC - AD = 1$.

Таким образом, при любой форме записи свойства четырёхполюсника могут быть охарактеризованы *тремя независимыми комплексными параметрами*, например, величинами Z_{11} , Z_{22} , Z_{21} или Y_{11} , Y_{22} , Y_{21} или, наконец, A , B , C . В качестве схем замещения четырёхполюсников (рис. 9.3а) используют Т-образную и П-образную схемы (рис. 9.3б и в), содержащие три независимых

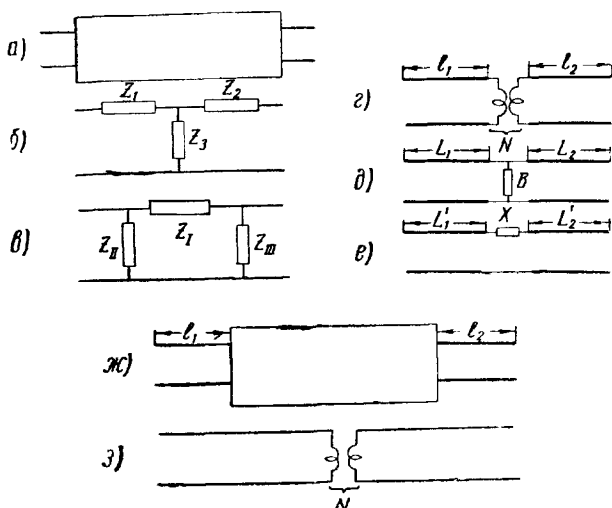


Рис. 9.3. Схемы замещения четырёхполюсников

комплексных параметра. Если четырёхполюсник *симметричный*, т. е. если $Z_{22} = Z_{11}$ (или, что то же самое, $Y_{22} = Y_{11}$), число независимых комплексных параметров снижается до двух и схема замещения становится симметричной.

При отсутствии потерь энергии схема замещения содержит одни лишь *реактивные* элементы. Для описания свойств несимметричного четырёхполюсника в этом случае достаточно *трёх вещественных параметров* (например, величин реактивностей в Т-образной или П-образной схемах). Наряду с Т-образной и П-образной схемами, составленными из трёх реактивных элементов, можно использовать также другие схемы замещения (рис. 9.3г, д, е), описываемые тремя независимыми вещественными параметрами. Первая из этих схем состоит из двух отрезков длинной линии, произвольного волнового сопротивления и идеального трансформатора. Параметрами схемы являются длины отрезков l_1 и l_2 и коэффициент трансформации трансформатора N . Схемы (рис. 9.3д и е) также содержат два отрезка линии, но между ними параллельно или последовательно включена сосредоточенная

реактивность. Параметрами здесь являются длины отрезков линии L_1 и L_2 и реактивная проводимость Y (рис. 9.3г) или длины отрезков линии L'_1 и L'_2 и реактивное сопротивление X (рис. 9.3д).

Особенно широкое распространение, однако, получила схема замещения неоднородности без потерь с примыкающими к ней отрезками волновода одним эквивалентным трансформатором (рис. 9.3ж и з). На рис. 9.3ж показан четырёхполюсник с дополнительными отрезками линии l_1 и l_2 , которые специально подбираются так, чтобы схемой замещения всего составного четырёхполюсника был один идеальный трансформатор (рис. 9.3з) с коэффициентом трансформации N . Можно считать, что и в этом случае схема замещения характеризуется тремя вещественными параметрами, а именно коэффициентом трансформации эквивалентного трансформатора N и двумя координатами точек его подключения, например, расстояниями l_1 и l_2 . Линии на рис. 9.3ж или 9.3 з характеризуются в общем случае различными волновыми сопротивлениями ρ' и ρ'' .

При определении параметров эквивалентного четырёхполюсника достаточно произвести три независимых опыта, например: 1) измерение входного сопротивления при закороченных выходных зажимах (опыт короткого замыкания); 2) измерение входного сопротивления при разомкнутых выходных зажимах (опыт холостого хода); 3) измерение сопротивления, когда источник энергии подключён к выходным зажимам, а входные зажимы либо закорочены, либо разомкнуты (опыт обратного короткого замыкания или опыт обратного холостого хода). Измерение сопротивлений может быть произведено при помощи измерительной линии. Холостой ход или короткое замыкание в расчётном сечении обеспечивается путём перемещения по волноводу короткозамыкающего поршня (короткое замыкание соответствует расстоянию между поршнем и расчётным сечением, равному чётному числу, а холостой ход — нечётному числу четвертей длин волн в волноводе).

Для повышения точности измерений обычно не ограничиваются тремя экспериментами, а проводят большее их количество. В частности, при определении параметров неоднородностей без потерь получил распространение *метод сдвига узлов* или *метод S-кривой*. При использовании этого метода участок с неоднородностью заменяется эквивалентным трансформатором (рис. 9.4), параметрами которого являются коэффициент трансформации N , представляющий особый интерес, и координаты x_0 и y_0 входных и выходных зажимов.

Измерительная установка содержит: 1) генератор с аттенуатором (последний служит для ослабления влияния измерительной схемы на генератор и на рисунке не показан); 2) промежуточную измерительную волноводную линию (включена между генератором и неоднородностью); 3) короткозамкнутую на конце измери-

тельную волноводную линию. Волноводные линии по обе стороны неоднородности в общем случае могут различаться между собой и имеют фазовые постоянные α' и α'' . При перемещении поршня смещаются узлы стоячей волны слева и справа от неоднородности, характеризуемые на рис. 9.4 координатами x_1 и y_1 . Но сдвиги стоячей волны слева и справа в общем случае не равны между

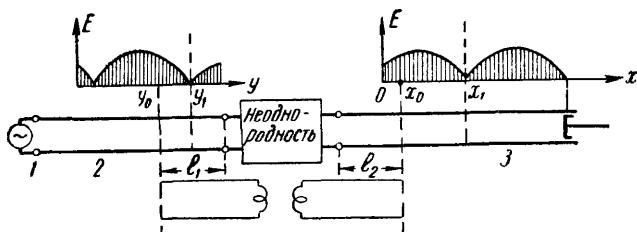


Рис. 9.4. Измерение параметров неоднородности без потерь по методу сдвига узлов

собой. Строя зависимость $\alpha' x_1$ от $\alpha'' y_1$, называемую *кривой сдвига узлов* или *S-кривой* (рис. 9.5), и зная уравнение этой кривой, можно найти все три параметра неоднородности.

Уравнение кривой сдвига узлов определяется из следующих соображений. Сопротивление Z_2 на входе идеального трансформатора отличается от сопротивления на его выходе в N^2 раз:

$$Z_2 = Z_1 N^2 = i \rho' N^2 \operatorname{tg} \alpha' (x_1 - x_0).$$

Пользуясь картиной волны (рис. 9.4), сопротивление Z_2 можно определить как сопротивление короткозамкнутого отрезка в сечении y_0 : $Z_2 = i \rho'' \operatorname{tg} \alpha'' (y_1 - y_0)$.

Сопоставляя эти два выражения для Z_2 находим уравнение кривой сдвига узлов

$$\operatorname{tg} \alpha'' (y_1 - y_0) = M \operatorname{tg} \alpha' (x_1 - x_0), \quad (9.5)$$

где величина $M = N^2 \frac{\rho'}{\rho''}$.

Покажем, что величина M представляет собой одно из экстремальных значений *крутизны* кривой сдвига узлов $S = \frac{d(\alpha'' y_1)}{d(\alpha' x_1)}$.

Действительно, вычисляя S из ур-ния (9.5), найдём S как производную сложной функции. Дифференцируя уравнение и беря отношение дифференциалов, получим

$$S = \frac{d(\alpha'' y_1)}{d(\alpha' x_1)} = M \frac{\cos^2 \alpha'' (y_1 - y_0)}{\cos^2 \alpha' (x_1 - x_0)} = M \cos^2 \alpha' (y_1 - y_0) \sec^2 \alpha' (x_1 - x_0).$$

Заменяя $\sec^2 \alpha' (x_1 - x_0) = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha' (x_1 - x_0)$ и подставляя значение тангенса из ур-ния (9.5), после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} S &= M \cos^2 \alpha'' (y_1 - y_0) \left[1 + \frac{1}{M^2} \operatorname{tg}^2 \alpha'' (y_1 - y_0) \right] = \\ &= M \cos^2 \alpha'' (y_1 - y_0) + \frac{1}{M} \sin^2 \alpha'' (y_1 - y_0). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Полагая далее $\frac{dS}{dy_1} = 0$, можно убедиться, что при

$$y_1 = y_0 + n \frac{\lambda}{2} \quad \text{и} \quad x_1 = x_0 + \nu \frac{\lambda}{2}$$

(n и ν — целые числа) достигается экстремальное значение крутизны $S_1 = M^1$.

Коэффициент трансформации эквивалентного трансформатора находится из соотношения

$$N = \sqrt{\frac{\rho''}{\rho'}} M = \sqrt{\frac{\rho''}{\rho'}} S_1. \quad (9.7)$$

За координаты x_0 и y_0 зажимов эквивалентного трансформатора принимаются координаты узлов, соответствующие выбранному экстремальному значению крутизны кривой или сдвинутые на целое число полуволн.

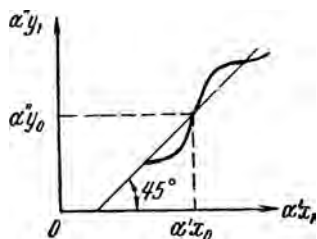


Рис. 9.5. Кривые сдвига узлов

Зная параметры M , x_0 и y_0 , можно пересчитывать любую нагрузку, подключённую к выходу неоднородности на её вход и тем самым в наиболее общем случае учитывать влияние неоднородности на режим работы.

На рис. 9.5 для определения M выделена точка максимума крутизны S -кривой и показаны соответствующие ей значения $\alpha' x_0$ и $\alpha'' y_0$. Если бы в качестве расчётной была взята точка минимума крутизны S -кривой, одновременно изменились бы коэффициент трансформации N и значения x_0 , y_0 , определяющие координаты зажимов эквивалентного трансформатора.

Последнее время схемы замещения неоднородностей как без потерь, так и с потерями начинают описывать при помощи так называемых коэффициентов рассеяния. Предположим, что по направлению к неоднородности с двух сторон распространяются электромагнитные волны. Если энергия этих волн

¹⁾ Второе экстремальное значение $S_2 = 1/M$ достигается при $y_1 = y_0 + \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$.

полностью поглощается в неоднородности, рассеяния энергии не происходит. В общем случае имеется рассеяние, вследствие этого наряду с прямыми волнами, распространяющимися к неоднородности, будут иметь место обратные волны. Явление рассеяния обусловлено двумя причинами: 1) отражением волн от неоднородности и 2) прохождением волн через неоднородность. Соответственно этому каждая из комплексных амплитуд обратных волн $\dot{b}_1$ и $\dot{b}_2$ линейно зависит от комплексных амплитуд прямых волн $\dot{a}_1$ и $\dot{a}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{b}_1 &= S_{11} \dot{a}_1 + S_{12} \dot{a}_2 \\ \dot{b}_2 &= S_{21} \dot{a}_1 + S_{22} \dot{a}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (9.8)$$

Все четыре коэффициента S_{11} , S_{12} , S_{21} и S_{22} называются *коэффициентами рассеяния*. Коэффициенты S_{11} и S_{22} характеризуют *отражение энергии* и представляют собой обычные коэффициенты отражения в первой линии ($S_{11} = p_1$) при условии, что вторая подключена к согласованной нагрузке ($a_2 = 0$), и во второй линии ($S_{22} = p_2$), когда к согласованной нагрузке подключена первая линия ($a_1 = 0$). Коэффициенты S_{12} и S_{21} характеризуют *прохождение энергии* через неоднородность. В силу теоремы взаимности коэффициенты S_{12} и S_{21} равны между собой. Таким образом, неоднородность можно охарактеризовать *тремя* комплексными коэффициентами рассеяния. Прямоугольная таблица (матрица), составленная из коэффициентов рассеяния,

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = S$$

носит название *матрицы рассеяния*¹⁾.

Точно так же можно говорить о матрицах сопротивления и проводимости:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} = Y.$$

Какой-либо элемент каждой из трёх матриц может быть выражен через три независимых элемента любой из двух других матриц. Для матриц Z и Y это следует уже из того, что соответствующие матричные коэффициенты связывают между собой одни и те же величины e_1 , e_2 , h_1 , h_2 . То же можно сказать и о матрице S коэффициентов рассеяния (по электрическому полю), если учесть, что $e_1 = a_1 + b_1$, $e_2 = a_2 + b_2$, $h_1 = \frac{1}{p_1}(a_1 - b_1)$, $h_2 = \frac{1}{p_2}(b_2 - a_2)$. Выбор

знаков в двух последних соотношениях связан с тем, что при положительных значениях напряжения ток считается положительным для волны, подводимой ко входу четырёхполюсника и отводимой от выхода.

Разработан метод экспериментального определения коэффициентов рассеяния, входящих в матрицу S , применимый как к неоднородностям с потерями, так и к неоднородностям без потерь. Измерения производятся при помощи той же экспериментальной установки (рис. 9.4), что и при методе S -кривой. В ходе измерений расстояние от закорачивающего поршня до выходного сечения неоднородности изменяется через равные интервалы ($\lambda/16$ или $\lambda/8$) в пределах одной полуволны поля. Каждый раз определяется коэффициент отражения p на входе неоднородности. Соответствующие точки наносятся на комплексную плоскость коэффициента отражения $p = |p|e^{i \arg p}$ (практически на диаграмму Вольперта).

¹⁾ Использование матриц ведёт к упрощению записи математических операций. См., например, В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, гл. I, 1949, стр. 101.

уравнение: $p_I = -e^{-12aI}$; 3) $S_{21} = S_{12}$. Тогда из соотношений (9.8) находим следующее

$$\rho = S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22} + e^{-i2\alpha l}}, \quad (9.9)$$

а это и есть уравнение окружности, описываемой концом вектора ρ при изменении параметра l .

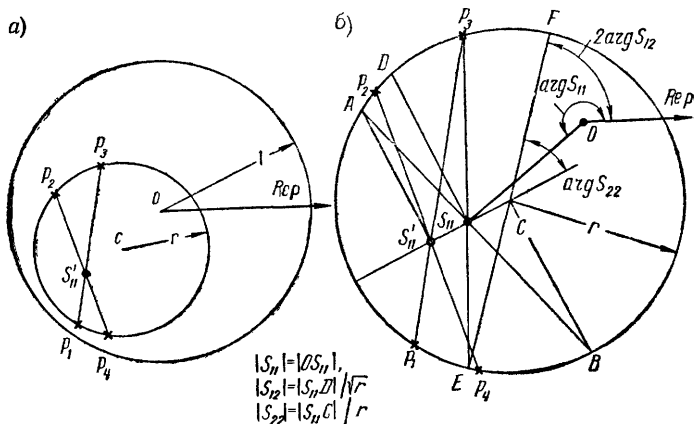


Рис. 9.6. Графическое определение коэффициентов рассеяния

В соответствии с ф-лой (9.9) справедлив следующий порядок определения матричных коэффициентов:

1. Точки экспериментальной окружности, для которых расстояния l отличаются на четверть волны, соединяются хордами. Все эти хорды имеют общую точку пересечения S'_{11} (рис. 9.6а).

2. Точка пересечения S'_1 соединяется с центром окружности C (это показано на рис. 9.6б, где окружность изображена в более крупном масштабе).

3. Из точек S_{11} и C восстанавливаются перпендикуляры $S_{11}A$ и CB , как показано на рис. 9.66.

4. Точки A и B соединяются прямой, которая пересекается с прямой $S'_{11}C$ в точке S_{11} , называемой *ионоцентром*. Соответствующее этой точке число на комплексной плоскости p представляет собой комплексный коэффициент S_{11} по модулю и фазе.

5. Через иконоцентр проводится полухорда $S_{11}D$, перпендикулярная прямой $S_{11}C$. Отношение длины этой полухорды к корню из радиуса r экспериментальной окружности даёт $|S_{12}|$.

6. Через иконоцентр и точку холостого хода $l = \frac{\lambda}{4}$ (точка P_3 на рис. 9.66) проводится хорда P_3E . Тогда угол, образованный диаметром EF с осью $\text{Re } p$, даёт $2 \arg S_{12}$.

Задача составления схемы замещения многополюсника (как и четырёхполюсника) не имеет однозначного решения. Примеры схем замещения шестиполюсника, содержащие необходимое число независимых комплексных параметров, представлены на рис. 9.7а и б, где элементы схем выражены через коэффициенты Z_{mn} или

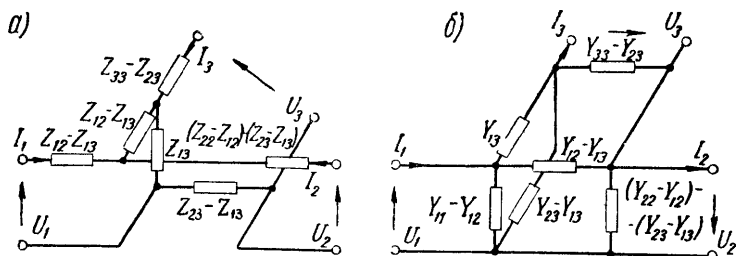


Рис. 9.7. Примеры схем замещения шестиполюсников (общий случай)

Y_{mn} . Легко проверить, что уравнения Кирхгофа для приведённых схем образуют системы вида (9.10) или (9.11). В случае, когда в исследуемом волноводном разветвлении отсутствуют потери, схема замещения состоит только из реактивных элементов и $2N$ -полюсник описывается Q_{2N} независимыми вещественными параметрами.

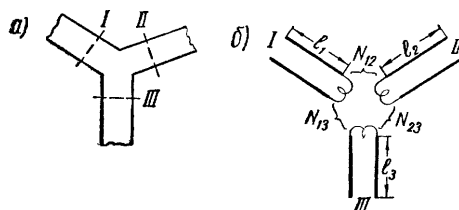


Рис. 9.8. Переход к схеме замещения многополюсника без потерь

подобного вида описываются нужным числом независимых вещественных параметров: числом $\frac{N(N-1)}{2}$ значений коэффициентов трансформации (число сочетаний из N по два) и числом N значений для отрезков линии. Общее число вещественных параметров схемы замещения составляет

$$N + N(N-1)/2 = N(N+1)/2 = Q_{2N}.$$

Вместо схемы замещения (рис. 9.8б) можно использовать схему, состоящую из индуктивно связанных катушек и не содержащую отрезков линий. Координаты сечений I, II, III волновода, которые являются в данном случае параметрами схемы замещения, требуют тогда специального подбора.

Параметры схем замещения могут быть определены экспериментальным путём. Экспериментальное определение параметров $2N$ -полюсника можно свести к подключению известных сопротивлений (в частности, сопротивлений короткозамкнутых отрезков линий) к $(N-2)$ парам его зажимов и последующему определению параметров каждого полученного четырёхполюсника. Производя ряд таких опытов, можно определить все параметры схемы.

Последнее время часто используется описание свойств сложных волноводных разветвлений с помощью коэффициентов рассеяния эквивалентных многополюсников. Коэффициентом рассеяния S_{mn} многополюсника называют отношение комплексной амплитуды рассеянной от многополюсника волны на выходе n -го плеча к комплексной амплитуде распространяющейся волны на входе m -го плеча, если в других плечах распространение волн к многополюснику отсутствует (см. § 9.2). При экспериментальном определении коэффициента S_{mn} все плечи, за исключением m -го и n -го, лучше всего нагрузить на согласованную нагрузку. Тогда коэффициенты, характеризующие выделенные плечи, могут быть определены при помощи экспериментальной установки (рис. 9.4) так же, как и для четырёхполюсника.

§ 9.4. ДИАФРАГМЫ В ВОЛНОВОДЕ

К числу простейших неоднородностей в волноводе, широко используемых в технике свч, принадлежат *волноводные диафрагмы* — тонкие поперечные проводящие перегородки, частично перекрывающие сечение волновода, — которые применяются как согласующие элементы волноводов. Использование диафрагм для этой цели основывается на возможности компенсации волны, отражённой от нагрузки, волной, отражённой от диафрагмы. Следует при этом иметь в виду, что диафрагма не только создаёт дополнительную волну в направлении к генератору, но и изменяет волну, идущую от нагрузки. Примеры диафрагм для волновода прямоугольной формы сечения представлены на рис. 9.9.

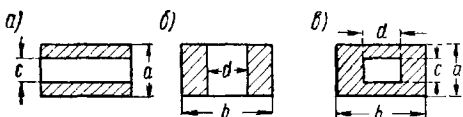


Рис. 9.9. Волноводные диафрагмы

Диафрагма является примером неоднородности, параметры которой можно найти расчётным путём более просто, чем для других неоднородностей. Тонкую диафрагму можно рассматривать как поперечную плёнку с током, возбуждаемым падающей на диафрагму электромагнитной волной. Согласно результатам гл. 8, введение поперечных токов в волновод равносильно включению параллельных токов в длинную линию, эквивалентную волноводу для соответствующего типа волны. Это значит, что для каждого из высших типов волн наличие диафрагмы в волноводе эквивалентно включению генератора тока в линию (рис. 9.10а).

Наоборот, для основного вида волны диафрагма является шунтирующей линией эквивалентной проводимостью Y_s (рис. 9.10б)

Другими словами, эквивалентный четырёхполюсник для основного типа волны вырождается в случае диафрагмы в реактивный двухполюсник.

Эквивалентная проводимость Y_s является основным параметром, характеризующим работу диафрагмы. На практике обычно интересуются приведённой эквивалентной проводимостью

$$Y'_s = Y_s : \frac{1}{\rho} = Y_s \rho, \quad (9.14)$$

которая может быть непосредственно измерена при помощи волноводной измерительной линии. Проводимость Y_s представляет собой приведённую проводимость в сечении диафрагмы, когда после диафрагмы включён закороченный отрезок волновода длиной в нечётное число четвертей длин волн.

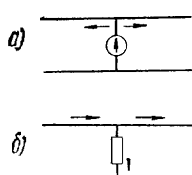


Рис. 9.10. Эквивалентные схемы диафрагм для высшего и основного типов волн

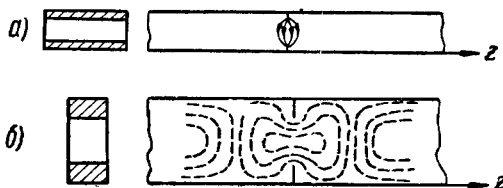


Рис. 9.11. Пояснение характера проводимости индуктивной и ёмкостной диафрагм

Расчёт приведённой проводимости диафрагмы (рис. 9.9а), называемой *симметричной ёмкостной диафрагмой*, даёт

$$Y'_s = i B_s \approx i \frac{4a}{\lambda_g} \ln \csc \frac{\pi c}{2a}. \quad (9.15)$$

Из рис. 9.11а видно, что эта диафрагма концентрирует преимущественно электрическое поле и поэтому вносит в линию шунтирующую ёмкость. Ход расчёта поясняется ниже.

Диафрагма (рис. 9.9б) концентрирует преимущественно магнитное поле (рис. 9.11б) и вносит в линию шунтирующую индуктивность. Выражение для приведённой проводимости этой диафрагмы, называемой *симметричной индуктивной диафрагмой*, имеет вид

$$Y'_s = i B'_s \approx -i \frac{\lambda_g}{b} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} \frac{d}{b}. \quad (9.16)$$

Графики зависимостей приведённой реактивной проводимости B'_s от относительной ширины отверстия χ приведены на рис. 9.12. Для ёмкостной диафрагмы $\chi = c/a$, а для индуктивной $\chi = d/b$. При $\chi = 1$, т. е. когда диафрагма отсутствует, значение $B'_s = 0$. Наоборот, при $\chi = 0$, т. е. когда волновод закорочен, значение $|B'_s| = \infty$.

Более сложная диафрагма (рис. 9.9в) эквивалентна параллельному соединению индуктивности и ёмкости и соответствует включению в линию параллельного колебательного контура. При определённых соотношениях между размерами выреза и длиной волны этот контур настроен в резонанс с частотой генератора и не шунтирует волновода. Поэтому такая диафрагма называется *резонансной*.

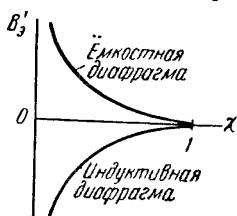


Рис. 9.12. Зависимость эквивалентной реактивной проводимости диафрагмы от относительной ширины отверстия

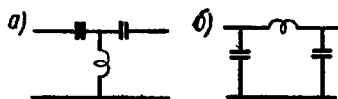


Рис. 9.13. Четырёхполюсники, эквивалентные толстым диафрагмам

Приведённые соотношения относились к тонким диафрагмам, для которых эквивалентная схема сводится к включению проводимости Y_s в линию. В случае диафрагм конечной толщины в эквивалентную линию приходится включать четырёхполюсники, показанные на рис. 9.13а для индуктивной и на рис. 9.13б для ёмкостной диафрагм.

Эквивалентные схемы можно строить так же, заменяя диафрагму идеальным трансформатором в линии, но при этом длины отрезков линии не равны длинам соответствующих отрезков волновода. Поэтому для волноводов с тонкими диафрагмами такой способ составления эквивалентных схем используется крайне редко.

Поскольку введение диафрагмы в волновод эквивалентно включению реактивного шунта (шунта Татаринова) в линию, диафрагмы находят широкое применение для согласования волновода с нагрузкой. Величина приведённой проводимости диафрагмы и её положение в волноводе, необходимые для согласования, могут быть найдены по ксв и положению минимумов поля в несогласованном волноводе. Расчёт производится аналитическим путём или по круговой диаграмме. Что касается размеров диафрагмы, то они могут быть определены по проводимости Y'_s . Наряду с использованием диафрагм для согласования с нагрузкой, волноводные

диафрагмы ставятся иногда вблизи возбуждающего штыря, облегчая согласование с генератором. Особенно часто для целей согласования используются *индуктивные* диафрагмы. Ёмкостные диафрагмы на практике применяются сравнительно редко, так как при их включении снижается допустимая мощность, которая может передаваться по волноводу. В некоторых типах антенных переключателей применяются резонансные диафрагмы. Система резонансных или нерезонансных диафрагм может быть использована для создания полосовых волноводных *частотных фильтров*.

Перейдём к рассмотрению некоторых теоретических соотношений, на основании которых рассчитывается эквивалентная проводимость диафрагмы Y_s .

Если распределение тока $I_s(x, y)$ по диафрагме считать известным, расчёт эквивалентной проводимости диафрагмы не представляет особенно большого труда. По известному распределению тока можно рассчитать комплексные амплитуды пространственных гармоник как для основного, так и для высших типов волн

$$I_v = \int_{S_{\text{диафр}}} I_s(x, y) F_v(x, y) dS. \quad (9.17)$$

Вслед за этим можно составить баланс между реактивной мощностью $P_1 = I_1^2 / 2Y_s$, отбираемой у основного типа волны шунтирующей проводимостью Y_s , и суммой реактивных мощностей P_v , расходуемых на создание полей высших типов волн,

$$\dot{P}_1 = \frac{I_1^2}{2Y_s} = \sum_{v=2}^{\infty} \dot{P}_v. \quad (9.18)$$

Каждую из реактивных мощностей, идущих на создание полей высших типов волн, можно вычислить, заменяя согласованные отрезки линии (рис. 9.10а) волновыми сопротивлениями, т. е.

$$\dot{P}_v = \frac{1}{2} I_v^2 \frac{\rho_v}{2}. \quad (9.19)$$

Влияние нагрузки и других неоднородностей при этом не учитывается вследствие местного характера рассматриваемых полей. Подставляя выражения (9.19) в (9.18) и поделив обе части равенства на $I_1^2 \rho_1 / 2$, получим выражение для приведённой эквивалентной проводимости

$$\frac{1}{Y'_s} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{I_v}{I_1} \right)^2 \frac{\rho_v}{\rho_1}, \quad (9.20)$$

которая зависит от отношений амплитуд высших пространственных гармоник поперечного тока к амплитуде первой гармоники,

т. е. определяется законом распределения поверхностного тока по диафрагме.

Вместо того чтобы задаваться аппроксимацией тока на диафрагме, можно взять за исходное *аппроксимацию электрического поля* в отверстии $E_S(x, y)$. Поскольку электрическое поле на диафрагме равно нулю, то скалярные амплитуды электрического поля в плоскости диафрагмы определяются путём интегрирования его по отверстию

$$\dot{e}_v = \int_{S_{отв}} \dot{E}_S(x, y) F_v(x, y) dS. \quad (9.21)$$

Условие баланса мощностей можно тогда записать так

$$\frac{1}{2} e_1^2 Y_s = \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e_v^2}{\left(\frac{\rho_v}{2}\right)}, \quad (9.22)$$

откуда, поделив обе части равенства на $\frac{e_1^2}{2\rho_1}$, получим выражение для приведённой эквивалентной проводимости

$$Y'_s = 2 \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\rho_1}{\rho_v} \left(\frac{e_v}{e_1}\right)^2. \quad (9.23)$$

Выражения (9.23) и (9.20) для расчёта проводимости диафрагмы эквивалентны друг другу. В обоих случаях подбор соответствующей аппроксимации — поля в отверстии или тока на диафрагме — представляет, вообще говоря, сложную математическую задачу, решаемую методами вариационного исчисления, или теории интегральных уравнений. Однако в ряде случаев даже грубая аппроксимация позволяет получить достаточно точные результаты.

В качестве примера применим написанные выражения к *симметричной ёмкостной диафрагме* (рис. 9.9а). Ввиду того что она однородна вдоль оси y волновода, суммарное электрическое поле в отверстии имеет одну составляющую E_x , распределённую вдоль оси x по тому же закону, что и у исходной волны H_{01} , т. е.

$$E = E_x x^0 = \psi(x) \sin \frac{\pi}{b} y x^0.$$

Тогда выражение (9.21) для коэффициентов разложения даёт

$$\dot{e}_v = \int_{S_{отв}} \mathbf{E} F_v dx dy = \int_{S_{отв}} E_x F_{x_v} dx dy. \quad (9.24)$$

В отличие от рассмотренного ранее общего случая, здесь более удобно вести отдельную нумерацию для волн E и H , исходя из числа полуволн поля m по координате x . В обоих случаях в силу данных табл. 7.1 и соотношений (8.17), (8.19)

$$F_{xy} = C_m \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y = F_{xm},$$

где

$$C_m = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{m\pi}{a} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} & \text{для волн } E_{m1} (m = 1, 2, \dots) \\ \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{\pi}{b} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} & \text{для волн } H_{m1} (m = 1, 2, \dots) \\ \sqrt{\frac{2}{ab}} & \text{для волны } H_{01} (m = 0). \end{cases}$$

Подставляя в (9.24) значения E_x и F_{xy} и интегрируя по координате y в пределах от 0 до b , получим выражения для коэффициентов разложения

$$\dot{e}_y = \dot{e}_m = \frac{b}{2} C_m \int \psi(x) \cos \frac{m\pi}{a} x dx,$$

где интегрирование ведётся поперёк отверстия диафрагмы.

Выражение (9.23) с учётом значений волновых сопротивлений для волн E и H , определяемых соотношениями (3.57), (3.53), может быть представлено в виде

$$Y'_y = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega\mu}{a} \frac{\frac{i\omega\epsilon}{\beta_m} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{\beta_m}{i\omega\mu} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} \left[\frac{\int \psi(x) \cos \frac{m\pi}{a} x dx}{\int \psi(x) dx} \right]^2,$$

где

$$\beta_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 - \omega^2\epsilon\mu}. \quad (9.25)$$

Используя соотношения (9.25), (2.54), (2.65), получим

$$\frac{\omega\mu}{a} \frac{\frac{i\omega\epsilon}{\beta_m} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{\beta_m}{i\omega\mu} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} = i \frac{2\pi}{\lambda_g} \frac{1}{\beta_m}.$$

Тогда формулу для приведённой эквивалентной проводимости диафрагмы можно представить в несколько более простой форме

$$Y'_s \approx i \frac{8a}{\lambda_g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2}} \times \\ \times \left[\frac{\int \psi(x) \cos \frac{m\pi}{a} x dx}{\int \psi(x) dx} \right]^2. \quad (9.26)$$

Далее нужно задаться аппроксимацией поля в отверстии диафрагмы. Простейшей аппроксимацией будет:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{a-c}{2} < x < \frac{a+c}{2} \\ 0, & \text{если } x < \frac{a-c}{2} \text{ или } x > \frac{a+c}{2}. \end{cases}$$

Обозначая относительную ширину отверстия $c/a = \chi$ и производя интегрирование, получим

$$Y'_s \approx i \frac{8a}{\lambda_g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2}} \times \\ \times \left(\frac{\sin \frac{m\pi}{2} \chi}{\frac{m\pi}{2} \chi} \right)^2 \cos^2 \frac{m\pi}{2}. \quad (9.27)$$

Например, в случае, когда $\chi = 1/2$, $\lambda \gg a$ и $b \gg a$,

$$Y'_s \approx i \frac{8a}{\lambda_g} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{10^3} \right) \approx i \frac{1,7a}{\lambda_g}. \quad (9.28)$$

Как более точную можно взять аппроксимацию $\psi(x)$, соответствующую распределению поля в раскрые диафрагмы для статической одномерной задачи, когда $\lambda \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$ ¹⁾. Однако можно

¹⁾ Такую аппроксимацию $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{a} \left[\sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{c}{a} - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right]$ можно найти по данным решения статической задачи (приложение 9.1).

пойти и дальше, заимствуя из решения статической задачи уже не аппроксимацию, а готовые значения суммы ряда. Полагая в (9.27), $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \approx 0$, найдём «квазистатическое одномерное» приближение

$$Y'_s \approx i \frac{8a}{\lambda_g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{\int \psi(x) \cos \frac{m\pi}{a} x dx}{\int \psi(x) dx} \right]^2. \quad (9.29)$$

Ввиду того, что при $b \rightarrow \infty$ волновод переходит в ленточную линию, выражение (9.29) даёт приведённую проводимость Y'_{s0} диафрагмы в ленточной линии при волне TEM , когда $\lambda_g = \lambda$. Но в этом случае Y'_{s0} представляет собой отношение проводимости погонной статической ёмкости диафрагмы C_{noz} к волновой проводимости ленточной линии единичной ширины при расстоянии между проводниками a (см. приложение 9.1). Таким образом,

$$Y'_{s0} = \frac{i \omega C_{noz}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{a}} \approx i \frac{8a}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{\int \psi(x) \cos \frac{m\pi}{a} x dx}{\int \psi(x) dx} \right]^2.$$

Это позволяет выразить сумму ряда, входящего в соотношение (9.29), через погонную статическую ёмкость C_{noz} . Используя значение этой ёмкости $C_{noz} = \frac{2\varepsilon}{\pi} \ln \csc \frac{\pi}{2} \chi$, вычисленное в приложении 9.1, получим следующее выражение для приведённой проводимости симметричной ёмкостной диафрагмы в волноводе

$$Y'_s \approx i \frac{2\pi}{\lambda_g} \frac{C_{noz} a}{\varepsilon} = i \frac{4a}{\lambda_g} \ln \csc \frac{\pi}{2} \chi, \quad (9.30)$$

что совпадает с выражением (9.15).

Как видно из хода проведённых рассуждений, найденное выражение является приближённым. В частном случае идеально тонкой диафрагмы при $b \gg \lambda \gg a$ оно становится точным и его можно использовать для контроля выражения (9.28), полученного на основании более грубой аппроксимации $\psi(x)$. Полагая в (9.30) $\chi = 1/2$, получим

$$Y'_s = i \frac{1,4a}{\lambda_g}, \quad (9.31)$$

так что выражение (9.28) всего на 20% отличается от более точного выражения (9.31).

§ 9.5. ПРИЕМНЫЙ ШТЫРЬ В ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим волновод (рис. 9.14а), в котором на пути распространяющейся по нему волны стоит тонкий приёмный штырь. К штырю может быть присоединён коаксиальный фидер либо кристаллический детектор. На конце волновод может быть закончен или произвольно нагружен. Эквивалентная схема волновода для основного типа волны представлена на рис. 9.14б в виде линии, в поперечном сечении которой ответвляется ток I_s , представляющий собой ток штыря, пересчитанный соответственно соотношению (8.45). Ток I_s ответвляется через некоторое эквивалентное сопротивление Z_s . В сопротивлении расходуется полная мощность

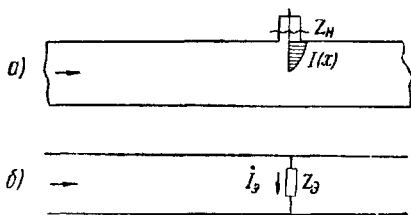


Рис. 9.14. Волновод с приёмным штырем и его эквивалентная схема

$$\Delta \dot{P} = \frac{1}{2} I_{\text{от}}^2 Z_s,$$

которая отбирается от распространяющейся к концу волновода волны основного типа. Эта мощность расходуется в нагрузке, к которой подводится энергия от штыря и, кроме того, затрачивается на создание местного поля волн высших типов в самом волноводе, т. е.

$$\Delta \dot{P} = \dot{P}_n + \dot{P}_{\text{выс}}.$$

Мощность $\dot{P}_n$, поступающая в нагрузку штыря, выражается через сопротивление нагрузки Z_n и амплитуду тока $I_{\text{от}}$ у основания штыря

$$\dot{P}_n = \frac{1}{2} I_{\text{от}}^2 Z_n.$$

Реактивную мощность $\dot{P}_{\text{выс}}$, расходуемую на создание местного поля, можно было бы выразить через пространственные гармоники тока штыря, как в § 9.4. Можно, однако, поступить несколько иначе и ввести реактивное сопротивление штыря $X_{\text{выс}}$, обусловленное волнами высших типов, подобно тому, как это было сделано в гл. 8. Тогда

$$\dot{P}_{\text{выс}} = \frac{1}{2} I_{\text{от}}^2 i X_{\text{выс}}.$$

Баланс мощностей принимает вид

$$\frac{1}{2} I_{эм}^2 Z_э = \frac{1}{2} I_{0т}^2 Z_н + \frac{1}{2} I_{0т}^2 i X_{выс}, \quad (9.32)$$

откуда

$$Z_э = \left(\frac{I_{0т}}{I_{эм}} \right)^2 (Z_н + i X_{выс}). \quad (9.33)$$

Соотношение (9.33) показывает, что шунтирующее действие приёмного штыря на волновод зависит как от размеров и положения штыря, определяющих значения $X_{выс}$ и $\frac{I_{0т}}{I_{эм}}$, так и от величины нагрузочного сопротивления, присоединённого к штырю. Легко понять, что штырь, расположенный в центре поперечного сечения, сильнее шунтирует волновод, чем штырь, расположенный у боковой стенки (большее отношение $\frac{I_{эм}}{I_{0т}}$ и, следовательно, меньшее $Z_э$).

Представляет некоторый интерес найти условие согласования волновода, нагруженного приёмным штырём, если этот волновод закорочен на конце, противоположном генератору (рис. 9.15а). Для того чтобы имел место режим бегущей волны в волноводе, сумма эквивалентной проводимости, вносимой штырём в волновод, и

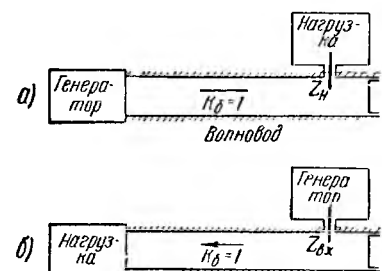


Рис. 9.15 Схемы питания со стороны волновода и коаксиального кабеля

проводимости короткозамкнутого шлейфа должна равняться волновой проводимости.

$$\frac{1}{Z_э} + \frac{1}{i \rho \operatorname{tg} \alpha l} = \left(\frac{I_{эм}}{I_{0т}} \right)^2 \frac{1}{Z_н + i X_{выс}} + \frac{1}{i \rho \operatorname{tg} \alpha l} = \frac{1}{\rho}.$$

Определяя отсюда $Z_н$, в результате преобразований получим

$$Z_н = \left(\frac{I_{эм}}{I_{0т}} \right)^2 \rho \left(\sin^2 \alpha l - i \frac{1}{2} \sin 2 \alpha l \right) - i X_{выс}. \quad (9.34)$$

Полученную формулу целесообразно сопоставить с ф-лой (8.61) для входного сопротивления штыря $Z_{вх}$, когда волновод возбуждается генератором, присоединённым к коаксиальному кабелю, будучи при этом согласован с одной стороны и закорочен с другой (рис. 9.15б). Легко видеть, что

$$Z_н = Z_{вх}^*. \quad (9.35)$$

Это значит, что согласование в волноводе имеет место, если сопротивление нагрузки штыря в режиме приёма равно *сопряжённому* значению входного сопротивления штыря в режиме возбуждения.

9.6. РЕАКТИВНЫЙ ШТЫРЬ В ВОЛНОВОДЕ

Наряду с диафрагмами в качестве сосредоточенной реактивности часто используется штырь (рис. 9.16), соединённый со стенкой волновода. Этот штырь располагается вдоль линий поля и называется *реактивным* штырём. Как и диафрагма, реактивный штырь возбуждает волны высших типов, на что расходуется реактивная мощность. Ток штыря, в свою очередь, возбуждается за счёт волны основного типа и представляет для неё реактивную нагрузку. Последнюю можно представить в виде сосредоточенной реактивности, включённой в сечение длинной линии подобно тому, как это имело место для тонкой диафрагмы или тонкого приёмного штыря.

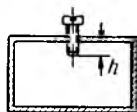


Рис. 9.16.
Реактивный
штырь в волноводе

Уравнение баланса энергии отличается от рассмотренного ранее (9.35) только тем, что $Z_n = 0$. Поэтому шунтирующее реактивное сопротивление, вносимое в эквивалентную линию,

$$Z_{\Sigma} = i X_{\Sigma} = \left(\frac{I_{0m}}{I_{\Sigma m}} \right)^2 i X_{\text{выс}}. \quad (9.36)$$

Характер реактивного сопротивления $i X_{\text{выс}}$, а значит, и сопротивления Z_{Σ} , зависит от длины штыря. Если длина штыря $h < \frac{\lambda}{4}$, то $X_{\text{выс}} < 0$. Тогда и $X_{\Sigma} < 0$, т. е. введение короткого реактивного штыря эквивалентно параллельному включению ёмкости в линию. Последнее связано с тем, что короткий штырь концентрирует в основном электрическое поле.

Наоборот, если длина штыря $h > \frac{\lambda}{4}$, то $X_{\text{выс}} > 0$ и, следовательно, $X_{\Sigma} > 0$, т. е. введение длинного штыря в волновод эквивалентно включению некоторой индуктивности в линию. Последнее связано с тем, что длинный штырь, по которому протекает ток, концентрирует в большей степени магнитное, чем электрическое поле.

В случае штыря резонансной длины $h \approx \frac{\lambda}{4}$ сопротивление $X_{\text{выс}}$ практически равно нулю, значит, равно нулю и X_{Σ} , т. е. введение такого штыря в волновод равносильно включению в линию *последовательного резонансного контура*.

§ 9.7. ИЗЛУЧАЮЩИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ЩЕЛИ КАК ВОЛНОВОДНЫЕ НАГРУЗКИ

Если расчёт волновода с возбуждающей щелью для какого-либо типа волны эквивалентен расчёту длинной линии, питаемой генератором (гл. 8), то расчёт волновода с излучающей щелью эквивалентен расчёту длинной линии, нагруженной на некоторое сопротивление.

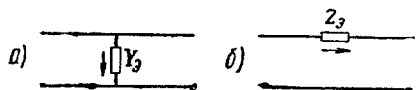


Рис. 9.17. Эквивалентные схемы для продольной и поперечной излучающих щелей

Из предыдущего известно, например, что *продольной* возбуждающей щели с симметрично распределённым полем соответствует генератор тока, параллельно включённый в линию. В режиме излучения эта щель действует, очевидно, как *параллельная проводимость* Y_s , шунтирующая линию (рис. 9.17а). Если считать известными ток к проводимости $I_{эм}$ и полную мощность $\dot{P}$, то проводимость можно найти по формуле

$$Y_s = \frac{I_{эм}^2}{2 \dot{P}}. \quad (9.37)$$

Поперечная щель, которой в режиме возбуждения соответствует последовательный генератор (генератор эдс), действует в режиме *излучения* как *последовательное сопротивление* Z_s (рис. 9.17б). Если считать известными эквивалентное падение напряжения на этом сопротивлении и полную мощность $\dot{P} = \frac{1}{2} \dot{E}_{эм} \left(\frac{\dot{E}_{эм}}{Z_s} \right)^*$, само последовательное сопротивление определится так

$$Z_s = \frac{E_{эм}^2}{2 \dot{P}^*}, \quad (9.38)$$

где $\dot{P}^*$ — комплексно-сопряжённое значение полной мощности.

Мощность $\dot{P}$ складывается из мощности $\dot{P}_{вн}$, затрачиваемой на создание поля вне волновода, и реактивной мощности $\dot{P}_{выс}$, расходуемой на создание местных полей волн высших типов в волноводе,

$$\dot{P} = \dot{P}_{вн} + \dot{P}_{выс}. \quad (9.39)$$

В случае резонанса мощность $\dot{P}$ будем считать *активной* и равной мощности, излучаемой щелью,

$$\dot{P} = P_\Sigma, \quad (9.40)$$

полагая, что реактивные составляющие мощностей $\dot{P}_{\text{вн}}$ и $\dot{P}_{\text{выс}}$ компенсируют друг друга. Последнее принимается как *условие резонанса*.

Можно утверждать, что излучаемая мощность P_{Σ} прямо пропорциональна квадрату амплитуды напряжения на щели влучности напряжения

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} G_{\Sigma} U_{0m}^2, \quad (9.41)$$

где коэффициент G_{Σ} , имеющий размерность проводимости, называется проводимостью внешнего излучения щели, или, короче, её *внешней проводимостью*. Расчёт G_{Σ} сводится к решению так называемой внешней задачи и производится при следующих допущениях: 1) рассматривается полуволновая щель в бесконечном идеально проводящем экране, 2) закон распределения напряжения вдоль щели считается синусоидальным. При этих допущениях можно получить (см. приложение 9.2).

$$G_{\Sigma} = \frac{2 R_{\Sigma}}{\rho_0^2} = \frac{2 \cdot 73,1}{(120 \pi)^2} (\text{ом})^{-1}, \quad (9.42)$$

где $R_{\Sigma} = 73,1 \text{ ом}$ — сопротивление излучения полуволнового вибратора, $\rho_0 = 120 \pi \text{ ом}$ — волновое сопротивление для волны TEM в свободном пространстве.

После подстановки выражения (9.41) в ф-лу (9.37) для эквивалентной проводимости продольной щели Y_{Σ} последняя принимает вид

$$Y_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}} \left(\frac{I_{\Sigma m}}{U_{0m}} \right)^2. \quad (9.43)$$

Подобное же выражение для эквивалентного сопротивления поперечной щели будет

$$Z_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}} \left(\frac{E_{\Sigma m}}{U_{0m}} \right)^2. \quad (9.44)$$

Величины $\frac{I_{\Sigma m}}{U_{0m}}$ и $\frac{E_{\Sigma m}}{U_{0m}}$ могут быть рассчитаны как абсолютные значения соответствующих отношений комплексных амплитуд, которые определяются из соотношений (8.47—8.51). Эти величины можно найти несколько иначе, связав их с входными проводимостями $G_{\text{макс пр}}$ и $G_{\text{макс попер}}$ в режиме возбуждения, рассмотренными в § 8.13. Так, отношение $\frac{I_{\Sigma m}}{U_{0m}}$, входящее в ф-лу (9.43), можно выразить через входную проводимость продольной щели $G_{\text{макс пр}}$ в режиме возбуждения. Используя соотношение (8.67), получим

$$\left(\frac{I_{\Sigma m}}{U_{0m}} \right)^2 = \frac{G_{\text{макс пр}}}{\rho}.$$

Подставляя полученное выражение в ф-лу (9.43) и переходя одновременно к приведённому значению $Y'_z = Y_z \rho$, для продольной полуволновой щели получим

$$Y'_z = Y_z \rho = \frac{G_{\text{макс пр.}}}{G_{\Sigma}}. \quad (9.45)$$

Аналогично для поперечной полуволновой щели

$$Z'_z = \frac{Z_z}{\rho} = \frac{G_{\text{макс попер.}}}{G_{\Sigma}}. \quad (9.46)$$

Используя выражения (8.69), (8.70), (8.73) для $G_{\text{макс пр.}}$ и $G_{\text{макс попер.}}$ найденные в § 8.13, для прямоугольного волновода получим:

а) продольная полуволновая щель в широкой стенке (рис. 8.14б)

$$Y'_z = \frac{480}{\pi 73,1} \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{b}{a} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g} \cos^2 \frac{\pi}{b} y_0; \quad (9.47)$$

б) продольная полуволновая щель в узкой стенке (рис. 8.14а)

$$Y'_z = \frac{480}{\pi 73,1} \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{b}{a} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_g}; \quad (9.48)$$

в) поперечная щель в широкой стенке (рис. 8.15)

$$Y'_z = \frac{120}{\pi 73,1} \frac{\lambda_g^3}{ab \lambda} \cos^2 \frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{b} \sin^2 \frac{\pi}{b} y_0. \quad (9.49)$$

Следует специально отметить, что отрезок волновода с *продольной* щелью заменяется линией, шунтированной проводимостью Y_z , только в случае резонанса, когда распределение поля вдоль щели является *симметричным*. В общем случае отрезок волновода с продольной щелью заменяется некоторым четырёхполюсником.

§ 9.8. ВОЛНОВОДНЫЕ ТРОЙНИКИ

На рис. 9.18а показаны примеры волноводных ответвлений двух видов для волны H_{01} в прямоугольном волноводе. В первом случае ответвляемый волновод лежит в плоскости *магнитного* поля главного волновода. Такое ответвление носит наименование *ответвления типа Н*. Во втором случае ответвляемый волновод расположен в плоскости *электрического* поля главного волновода. Такое ответвление носит наименование *ответвления типа Е*. Как *Н*-, так и *Е*-ответвления широко используются на практике. Их называют также *Н*- и *Е*-волноводными тройниками.

С точки зрения волны основного типа H - и E -ответвления можно уподобить параллельному и последовательному ответвлениям длинных линий (рис. 9.18б). В самом деле, уже неоднократно отмечалось, что существует аналогия между волноводом и ленточной линией с металлическими изоляторами. Выделяя ленточные линии на широких стенках разветвляющихся волноводов, легко заметить, что для ответвления типа H они соединены параллельно, а для ответвления типа E — последовательно¹⁾.

Согласно изложенной теории, внешние свойства тройника как шестиполусника можно полностью описать, используя эквивалентные схемы, состоящие из шести элементов (рис. 9.7). В каждом конкретном случае целесообразно использовать эквивалентные схемы, которые по своей конфигурации приближаются к схемам параллельного или последовательного соединения линий. Тогда включение добавочных элементов, учитывающих местные поля, будет носить характер поправок к описанной ранее более грубой аппроксимации. Подобного вида точные эквивалентные схемы представлены на рис. 9.18 в отдельности для H и для E тройников.

Характерно, что представленные на рис. 9.18 в эквивалентные схемы содержат не шесть, а только пять элементов каждая. Последнее объясняется симметрией рассматриваемых волноводных тройников

относительно плоскости, пересекающей ответвляющийся волновод и проходящей через центр главного волновода. Поэтому на каждой из ранее рассмотренных схем замещения шестиполусника (рис. 9.7а и б) по одному элементу выпадает, поскольку в силу симметрии относительно плеча III элементы этих схем ($Z_{23}-Z_{13}$) и ($Y_{23}-Y_{13}$) равны нулю. Из пяти остающихся элементов каждой схемы два элемента, симметрично расположенные в линии, эквивалентной главному волноводу, равны между собой.

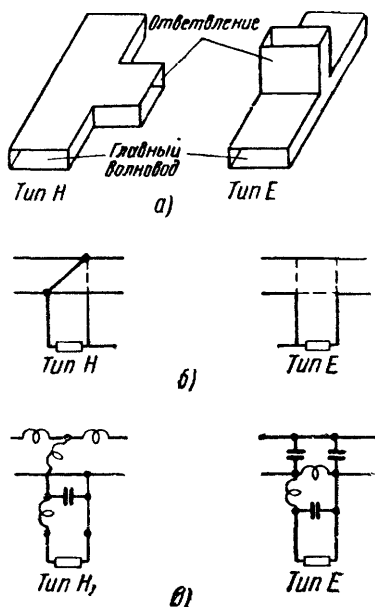


Рис. 9.18 Ответвления волновода в плоскости H и в плоскости E

¹⁾ Последнее согласуется с рассмотрением возбуждения главного волновода. В первом случае имеет место возбуждение поперечным полем в щели соответствующее параллельному включению. Во втором случае имеет место возбуждение продольным полем в щели, соответствующее последовательному включению.

Поэтому показанные на рис. 9.18а и б схемы описываются четырьмя независимыми параметрами каждая. Значения последних для некоторых конкретных видов разветвлений приводятся в литературе¹⁾.

Если в ответвляющееся плечо тройника поместить короткозамыкающий поршень, то это плечо приобретает характер реактивного шлейфа, подобного шлейфу Татаринова в длинных линиях. Реактивные волноводные шлейфы часто используются на практике в целях согласования волновода с нагрузкой. Секции волновода с двумя или тремя закороченными шлейфами переменной длины находят применение в измерительной технике как согласователи и трансформаторы полных сопротивлений. В одноантенных радиолокаторах реактивные шлейфы используются для коммутации антенны с приёмом на передачу и обратно. Действие волноводного шлейфа легко пояснить, используя аналогию с реактивным шлейфом в линии (рис. 9.18б). С точки зрения указанной аналогии при перемещении короткозамыкающего поршня изменяется величина параллельно или последовательно включаемого в линию реактивного сопротивления. Если длина шлейфа меняется от нуля до $\lambda_g/4$, его реактивное сопротивление изменяется от 0 до ∞ . При изменении длины шлейфа от $\lambda_g/4$ до $\lambda_g/2$ его реактивное сопротивление меняется от $-\infty$ до 0. Далее реактивное сопротивление шлейфа периодически меняется при изменении длины на каждые полволны в волноводе.

В действительности процессы при регулировке длины шлейфа являются несколько более сложными, чем это было только что описано выше, поскольку эквивалентными схемами волноводных тройников являются не схемы (рис. 9.18б), а более сложные схемы (рис. 9.18а). С учётом короткозамкнутого шлейфа фиксированной длины эти схемы переходят в схемы четырёхполюсников; Т-образную для *H*-тройника и П-образную для *E*-тройника. Две симметрично расположенные реактивности каждой из схем не зависят от длины шлейфа. Третья реактивность получается путём присоединения короткозамкнутого шлейфа к соответствующему элементу схемы. При изменении длины шлейфа эта реактивность может принимать произвольное значение от $-\infty$ до 0, в том числе и нулевое. Нулевое значение в схеме для *H*-тройника (бесконечное в схеме для *E*-тройника) соответствует прекращению передачи энергии по волноводу. Наоборот при некотором конечном значении реактивности волновое сопротивление Т-образной (или П-образной) схемы замещения совпадает с волновым сопротивлением линии. Это соответствует отсутствию отражений в главном волноводе от места включения шлейфа. Последнее существенно, например, при использовании волноводных шлейфов в антенных коммутаторах.

§ 9.9. ДВОЙНОЙ ТРОЙНИК

Рассмотрим волноводное устройство (рис. 9.19), образованное двумя ответвлениями от прямоугольного волновода, совмещёнными

¹⁾ См., например. Теория линий передачи сверхвысоких частот. Перевод под ред. А. И. Шпунтова «Советское радио», 1951, т. II, стр. 62, Справочник по волноводам. Перевод под ред. Я. Н. Фельда, «Советское радио», 1952, стр. 342, 361.

ми в одном и том же поперечном сечении. Поскольку это устройство содержит как H , так и E волноводные тройники, оно носит название *двойного волноводного тройника*. Плечо 1 двойного тройника, лежащее в плоскости линий магнитного поля, носит название *плеча H* . Плечо 2, лежащее в плоскости линий электрического поля, называется *плечом E* . Плечи 3 и 4 называются *боковыми*.

Двойной тройник по своим внешним показателям эквивалентен *восьмиполоснику*, соединённому с четырьмя длинными линиями. Двойной тройник получил весьма широкое распространение в волноводной технике, потому что он играет роль волноводного моста.

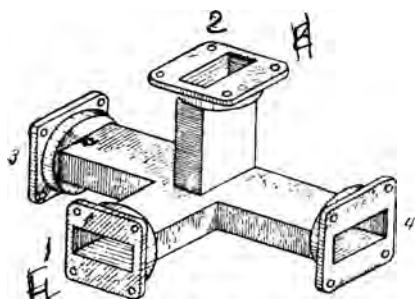


Рис. 9.19. Двойной волноводный тройник

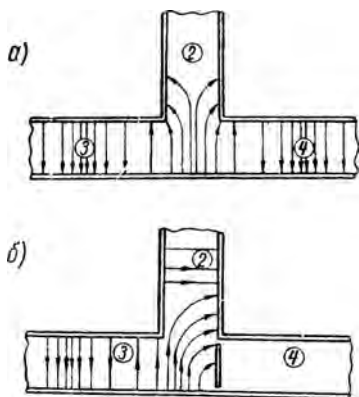


Рис. 9.20. Пояснение мостовых свойств двойного тройника

Чтобы наиболее просто проиллюстрировать свойства двойного тройника как волноводного моста, рассмотрим случай, когда в плечо 1 (плечо H) поступает энергия от источника колебаний высокой частоты, а в плечо 2 (плечо E) включён индикатор колебаний. Если боковые плечи 3 и 4 симметрично нагружены равными между собой волноводными нагрузками, то мощность колебаний, поступающая из плеча 1, поровну делится между боковыми плечами и не поступает в плечо 2. Это иллюстрирует рис. 9.20а, на котором представлено распределение линий электрического поля в плоскости E -тройника.

Очевидно, что при симметрии полей в боковых плечах 3 и 4 в плече 2 могут возбудиться одни только волны E , начиная с волны E_{11} . Однако при обычном выборе размеров эти волны создают только лишь местное поле в области разветвления и не доходят до индикатора.

При асимметрии нагрузок боковых плеч в плече 2 может возбудиться распространяющаяся волна типа H , которая дойдёт до индикатора. Это иллюстрирует рис. 9.20б, на котором представлен случай весьма резкой асимметрии (одно из боковых плеч закорочено в сечении разветвления).

Таким образом, двойной тройник можно использовать для *контроля равенства нагрузок*, присоединённых к боковым плечам. Плечи 3 и 4 называются при этом испытательными, поскольку они позволяют сравнивать неизвестную волноводную нагрузку с известной эталонной нагрузкой. Взяв в качестве эталона согласованную нагрузку, двойной тройник можно использовать для *контроля согласования*. Плечо 2 называется тогда *измерительным*. Отсутствие показаний прибора, включённого в это плечо, позволяет судить о равенстве нагрузок.

Итак, первым свойством двойного тройника является следующее: *при питании из плеча Н и симметрии нагрузок мощность делится между боковыми плечами и не поступает в плечо Е*. Аналогично можно убедиться в справедливости второго свойства: *при питании из плеча Е и симметрии нагрузок мощность делится между боковыми плечами и не поступает в плечо Н*. Это свойство иллюстрируется распределением поля, показанным на рис. 9.21.

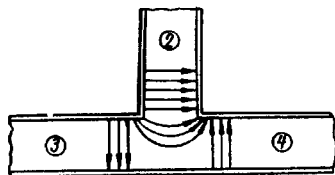


Рис. 9.21. Двойной тройник с симметричными нагрузками в плечах 3 и 4

Рассмотрим далее случай, когда энергия поступает в боковые плечи 3 и 4 (рис. 9. 19), а плечи 1 и 2, т. е. плечо Н и плечо Е, подключены к согласованным нагрузкам. Пусть колебания из плеч 3 и 4 приходят к плоскости симметрии двойного тройника в одинаковой фазе. Картина поля при этом подобна изображённой на рис. 9.20а (хотя и характеризуется противоположными направлениями

распространения волн). В этом случае *энергия не поступает в плечо Е, а поступает в плечо Н* (третье свойство двойного тройника). В свою очередь, если колебания из плеч 3 и 4 приходят к плоскости симметрии в противофазе, *энергия поступает в плечо Е и не поступает в плечо Н* (четвёртое свойство).

В режиме питания со стороны боковых плеч 3 и 4, даже при согласовании плеч 1 и 2 (рис. 9.19), наряду с прямыми волнами, в плечах 3 и 4 в общем случае имеют место отражённые волны. Используя реактивные элементы, *можно добиться согласования, причём одновременно для режимов синфазного и противофазного питаний* (пятое свойство). Это следует хотя бы из того, что реактивные элементы в глубине плеча Н будут действовать только для режима синфазного, а в глубине плеча Е — только для режима противофазного питаний (на практике с целью расширения диапазонности согласующие устройства располагаются ближе к центру разветвления, так что каждый из элементов влияет на оба режима). Двойной тройник, согласованный для режимов синфазного и противофазного питаний, назовём *дважды согласованным*.

При включении генератора только в одно из боковых плеч дважды согласованного тройника и при условии согласования

плеч H и E , мощность будет поровну делиться между этими плечами и не поступать во второе боковое плечо (шестое свойство). Действительно, данный режим можно рассматривать как наложение режимов синфазного и противофазного питаний со стороны боковых плеч, причём одинаковой интенсивности. В первом случае вся мощность идёт в плечо H , во втором — в плечо E (потерь в системе нет, а отражённые волны в боковых плечах для обоих случаев отсутствуют). Одновременно замечаем, что отражённые волны отсутствуют и для суммарного режима, т. е. *дважды согласованный тройник будет согласован со стороны каждого бокового плеча* (седьмое свойство).

Остановимся ещё на двух свойствах дважды согласованного тройника, характеризующих его поведение при съёме энергии или питании одновременно со стороны плеч E и H .

Поскольку выбор граничных сечений в этих плечах может быть неоднозначным, условимся, что граничные сечения выбраны таким образом, что при питании со стороны плеча 3 колебания в плечах E и H синфазны. Тогда при питании со стороны плеча 4 колебания в плечах E и H будут противофазны (восьмое свойство).

Если, наоборот, питать согласованный двойной тройник со стороны плеч H и E , то в силу теоремы взаимности *при синфазном питании энергия пойдёт только в плечо 3, а при противофазном питании — только в плечо 4* (девятое свойство). При согласованных боковых плечах дважды согласованный тройник *будет согласован также со стороны каждого из плеч E и H* (десятое свойство).

Все эти важные свойства согласованного двойного тройника привели к тому, что в литературе его иногда называют «магическим Т». Согласованный двойной тройник особенно удобен тем, что его плечи E и H (равно, как и боковые плечи) взаимно *развязаны*, например, регулировка в плече E не нарушает режима плеча H и наоборот.

Более детальное обоснование отдельных свойств двойного тройника можно получить из анализа его коэффициентов рассеяния, образующих матрицу рассеяния:

$$S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}. \quad (9.50)$$

При анализе учтём, во-первых, ряд соотношений, вытекающих из теоремы взаимности:

$$\left. \begin{array}{ll} а) S_{21} = S_{12}, & з) S_{32} = S_{23} \\ б) S_{31} = S_{13}, & д) S_{42} = S_{24} \\ в) S_{41} = S_{14}, & е) S_{43} = S_{34} \end{array} \right\}. \quad (9.51)$$

Учтём далее условие отсутствия потерь энергии в двойном тройнике. Ввиду того что волноводы в каждом из четырёх плеч одинаковы, из этого условия следует:

$$\left. \begin{aligned} a) |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 &= 1 \\ б) |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 &= 1 \\ в) |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{33}|^2 + |S_{34}|^2 &= 1 \\ г) |S_{41}|^2 + |S_{42}|^2 + |S_{43}|^2 + |S_{44}|^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

Соотношение (9.52а), например, означает, что мощность, поступающая в плечо 1, либо отражается обратно, либо направляется в плечи 2, 3, 4, нигде не теряясь.

Учтём, наконец, симметрию и особенности конструкции двойного тройника, сформулированные выше как свойства первое, второе, третье, четвертое. На языке коэффициентов рассеяния эти свойства можно выразить так:

$$\left. \begin{aligned} а) S_{12} &= 0, & в) S_{32} + S_{42} &= 0 \\ б) S_{21} &= 0, & г) S_{31} - S_{41} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.53)$$

Свойство второе (9.53б) следует непосредственно из свойства первого (9.53а) и соотношения (9.51а), вытекающего из теоремы взаимности.

Возможность согласования, сформулированная выше как пятое свойство двойного тройника, приводит:

1) к условиям согласования при синфазном питании

$$S_{33} + S_{43} = 0, \quad S_{34} + S_{44} = 0;$$

2) к условиям согласования при противофазном питании

$$S_{33} - S_{43} = 0, \quad S_{34} - S_{44} = 0.$$

Из приведённых выше соотношений следует:

$$\left. \begin{aligned} S_{12} &= S_{21} = S_{33} = S_{43} = S_{34} = S_{44} = 0 \\ S_{13} &= S_{31} = S_{14} = S_{41} = p \\ S_{32} &= -S_{42} = S_{23} = -S_{24} = q \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

где p и q — некоторые комплексные числа.

Система уравнений (9.52) переходит тогда в

$$\left. \begin{aligned} а) |S_{11}|^2 + 2|p|^2 &= 1, & в) |p|^2 + |q|^2 &= 1, \\ б) |S_{22}|^2 + 2|q|^2 &= 1, & г) |p|^2 + |q|^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Складывая уравнения полученной системы (а) и (б) и вычитая уравнения (в) и (г), найдём

$$|S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 = 0,$$

откуда следует, что в согласованном двойном тройнике

$$S_{11} = S_{22} = 0. \quad (9.55)$$

Тогда $|p| = |q| = 1/\sqrt{2}$, т. е.

$$|S_{31}|^2 = |S_{32}|^2 = \frac{1}{2}, \quad (9.56)$$

в то время, как $S_{34} = 0$, что соответствует шестому свойству. Одновременно имеем $S_{33} = 0$ и $S_{44} = 0$, что соответствует седьмому свойству.

Переходя к восьмому свойству, условимся, что за счёт выбора граничных сечений в плечах H и E не только $|S_{31}| = |S_{32}|$, но и $\arg S_{31} = \arg S_{32}$.

Тогда $S_{31} = S_{32}$, т. е.

$$p = q \quad (9.57)$$

и в силу (9.54) одновременно выполняется соотношение $S_{41} = -S_{42}$, а это и есть математическая формулировка восьмого свойства.

Учитывая (9.54) и (9.57), кроме того, имеем $S_{14} + S_{24} = 0$ и $S_{13} - S_{23} = 0$, что соответствует девятому свойству. Десятое свойство выражается полученными выше соотношениями (9.55).

С учётом всех найденных выражений для коэффициентов рассеяния согласованного двойного тройника матрицу рассеяния можно записать в виде

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & q & q \\ 0 & 0 & q & -q \\ q & q & 0 & 0 \\ q & q & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{e^{i \arg q}}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (9.58)$$

Здесь $\arg q$ — произвольная величина, которая меняется при одновременном перемещении всех граничных плоскостей

§ 9.10. ВОЛНОВОДНО-ЩЕЛЕВОЙ МОСТ

Наряду с двойным тройником в качестве моста используется в последнее время так называемый волноводно-щелевой мост, изображённый схематически на рис. 9.22. Он образован двумя соприкасающимися отрезками прямоугольного волновода с общей узкой стенкой. Стенка перерезана щелью $Ш$, в которой могут быть помещены элементы настройки H . Таким образом, волноводно-щелевой мост имеет четыре соединённых между собой плеча, I , II , III , IV .

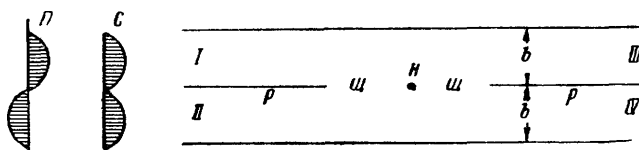


Рис. 9.22. Волноводно-щелевой мост

Чтобы наиболее просто пояснить работу моста, рассмотрим вначале два характерных режима:

- 1) режим противофазного питания со стороны плеч I и II ;
- 2) режим синфазного питания со стороны плеч I и II .

Эпюры распределения электрического поля во входных сечениях плеч моста I и II показаны для этих режимов на рис. 9.22 и обозначены соответственно буквами Π и Σ .

Рассмотрим режим противофазного питания. Очевидно, что пару волн H_{01} , распространяющихся по плечам I и II размера b в режиме противофазного питания, можно рассматривать как одну волну H_{02} в волноводе размера $2b$. Наличие или отсутствие разделительных стенок P , щели $Ш$ и настроечного элемента H не

влияют на длину волны в волноводе и фазовую структуру поля, поскольку все дополнительные проводящие элементы находятся в узловой плоскости электрического поля волны H_{02} .

Наоборот, для режима синфазного питания щель и настроенный элемент должны оказывать влияние на структуру поля, поскольку при отсутствии перегородки должна возбуждаться волна H_{01} в волноводе размера $2b$. Иначе говоря, участок волновода со щелью и настроенным элементом ведёт себя как реактивный четырёхполюсник, иной, чем для режима противофазного питания. В частности, этот четырёхполюсник можно отрегулировать так, чтобы он, не вызывая отражения синфазной волны, создавал бы для этой волны дополнительный сдвиг фаз φ по сравнению с противофазной.

Теперь нетрудно рассмотреть случай, когда мост питается только из одного плеча, например, плеча I . Режим питания моста через плечо I можно рассматривать как наложение синфазного и противофазного режимов питания из пары плеч I и II . При согласованных плечах III и IV результат наложения в этих плечах найдём путём простого суммирования синфазного и противофазного режимов с учётом дополнительного сдвига фаз φ . Легко видеть, что при сдвиге фаз $\varphi = \pi$ в плече III поля синфазной и противофазной волн взаимно компенсируются, а в плече IV — арифметически суммируются. При этом волна из плеча I пойдёт в плечо IV и не попадёт в плечи II и III .

Аналогично можно проследить, что при сдвиге фаз $\varphi = \pi$ волна из плеча II пойдёт в плечо III , из плеча III — в плечо II и из плеча IV — в плечо I .

Заметим, что волноводно-щелевой мост можно сделать коммутируемым. Изменяя сдвиг фаз от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 0$, можно добиться прохождения волны, идущей из плеча I либо в плечо IV , либо в плечо III . Достаточно быстрое управление фазовым сдвигом обеспечивается при помощи газоразрядных приборов, а также ферритов.

Характерно, что при $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$, волноводно-щелевой мост ведёт себя не совсем так, как двойной тройник, где, например, при питании через плечо E или плечо H энергия делится поровну между двумя боковыми плечами. Большее сходство достигается при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. В этом случае при питании через плечо I энергия поровну делится между плечами III и IV , но колебания в этих плечах будут в квадратуре, а не синфазными или противофазными, как колебания в боковых плечах двойного тройника при питании со стороны плеча E или плеча H .

Более подробное описание работы волноводно-щелевого моста, как и двойного тройника, достигается при помощи соответствующей матрицы рассеяния.

ГЛАВА 10

ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

§ 10.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В электронных приборах бегущей волны используются волноводные системы, волны в которых нарастают за счёт отбора кинетической энергии электронов, направляемых в виде пучка вдоль оси системы. Фазовая скорость волны в системе должна быть примерно равна скорости электронов, которая во всяком случае меньше скорости света в пустоте. За счёт этого достигается длительное пребывание движущихся сгустков электронов в тормозящих участках электромагнитной волны, что и приводит к передаче энергии электромагнитному полю.

Таким образом, возникает задача понизить фазовую скорость волны. Волноводные системы, обеспечивающие существенное понижение фазовой скорости по сравнению со скоростью света в пустоте, называются *замедляющими системами*. Замедляющие системы используются не только в электронике свч, но и в целях задержки сигналов на более низких частотах (например, спиральные линии задержки), а также как элементы антенн свч.

В данной главе рассмотрены некоторые из основных методов замедления: использование диэлектрика, периодических структур, спирали. Замедляющие системы анализируются в отсутствие электронного потока. В заключение выводится дифференциальное уравнение возбуждения поля в замедляющей системе, справедливое для случая больших замедлений. Это уравнение используется в следующей главе, где рассмотрено взаимодействие замедляющей системы и электронного потока.

§ 10.2. ПЛОСКИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД КАК ПРОСТЕЙШАЯ ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА

Один из принципиально наиболее простых методов уменьшения фазовой скорости состоит в заполнении проводящей трубы или промежутка между параллельными проводящими плоскостями средой с большой диэлектрической проницаемостью. Оказывается, однако, что если убрать проводящие стенки, то и после это-

го при определённых условиях возможно направленное распространение электромагнитных волн в системе.

Напомним, что направляющее действие проводящих поверхностей связано с отражением от них электромагнитных волн, как это было показано, например, на рис. 2.24. Известно, однако, что отражение имеет место не только от проводника, но и при переходе из одной диэлектрической среды в другую. В частности, при переходе из оптически более плотной среды в оптически менее плотную при углах падения θ , больших порогового $\theta_{\text{порог}}$, имеет место полное внутреннее отражение.

Следовательно, и в этом случае при определённых соотношениях между толщиной диэлектрика и длиной волны возможно направленное распространение электромагнитной энергии.

Обратим внимание на то, что диэлектрические волноводы следует рассматривать не только как устройства для замедления, а скорее как один из принципиально возможных вариантов осуществления волноводной передачи, хотя и не получивший ещё практического применения. Из методических соображений рассмотрение диэлектрического волновода целесообразно предпослать рассмотрению других типов замедляющих систем.

(диэлектрик, гребёнка, спираль).

Чтобы подробнее ознакомиться с явлением распространения волн в диэлектрическом волноводе, рассмотрим плоско-параллельную диэлектрическую пластину (рис. 10.1) с диэлектрической постоянной ϵ , помещённую в среду с диэлектрической постоянной $\epsilon_1 < \epsilon$. Найдём решение граничной задачи в виде волны E , однородной вдоль оси x .

Для каждой из сред используем решение ур-ния (2.94) ¹⁾

$$E_z(y) = A \cos ky + B \sin ky = \frac{A - iB}{2} e^{iky} + \frac{A + iB}{2} e^{-iky}. \quad (10.1)$$

В силу соотношений (2.19), (2.18), имеем

$$\begin{aligned} H'_x &= \frac{i\omega\epsilon}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{i\omega\epsilon}{k} (A \sin ky - B \cos ky) = \\ &= -\frac{\omega\epsilon}{k} \left(\frac{A - iB}{2} e^{iky} - \frac{A + iB}{2} e^{-iky} \right). \end{aligned} \quad (10.2)$$

¹⁾ Перед чтением последующего материала рекомендуется просмотреть § 2.15.

Как и в § 2.15, обозначения компонентов поля E_z , H_x и собственных чисел k будем снабжать индексом 1 для области 1 ($y < 0$), индексом 2 для области 2 ($y > b$) и оставлять без индексов для центральной области $0 < y < b$. При наличии явления полного внутреннего отражения поле убывает в глубь оптически менее плотной среды по экспоненциальному закону. В связи с этим, как и в § 2.15, для областей 1 и 2 удобнее пользоваться экспоненциальной формой записи. Полагая $\operatorname{Re} i k_{1,2} > 0$ и учитывая, что составляющие поля стремятся к нулю при $y \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow \infty$, находим, что

$$\frac{A_1 + i B_1}{2} = 0, \quad \frac{A_2 - i B_2}{2} = 0. \quad (10.3)$$

Используя граничные условия $E_z = E_{z2}$, $H_x = H_{x2}$ при $y = b$ и $E_z = E_{z1}$, $H_x = H_{x1}$ при $y = 0$, находим систему уравнений, двойственную системе (2.121), из которой, имея в виду случай $\epsilon \neq \epsilon_1$, получим уравнение:

$$\operatorname{tg} kb = i \frac{2 k k_1 \epsilon \epsilon_1}{k^2 \epsilon_1^2 + k_1^2 \epsilon^2}, \quad (10.4)$$

подобное трансцендентному уравнению (2.122). Кроме того, учитывая, что $k_1^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon_1 \mu$, а $k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu$, имеем

$$k_1^2 = k^2 + \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon) \mu. \quad (10.5)$$

Решая систему уравнений (10.4), (10.5) для каждой частоты ω , можно найти соответствующие значения k и k_1 , а значит, и постоянной распространения γ . При $\epsilon > \epsilon_1$ с ростом частоты величина k_1^2 имеет тенденцию к уменьшению и в конце концов становится отрицательной, т. е. показатели степени $i k = i k_1$ в (10.1) и (10.2) становятся вещественными. Это согласуется с тем, что в картине рис. 2.24 с увеличением частоты угол Θ увеличивается и после того, когда Θ станет больше $\Theta_{\text{порог}}$, наступает явление полного внутреннего отражения. Чем больше Θ , тем меньше глубина проникновения поля в оптически менее плотную среду.

Пороговой частотой $\omega_{\text{порог}}$ назовём такую частоту, когда $k_1 = 0$. Это значит, что при пороговой частоте убывание поля по обе стороны от пластины ещё отсутствует, но при $\omega > \omega_{\text{порог}}$ такое убывание уже имеет место. Пороговая частота соответствует очевидно $\Theta = \Theta_{\text{порог}}$. При пороговой частоте уравнений (10.4) и (10.5) дают

$$\omega_{\text{порог}}^2 (\epsilon - \epsilon_1) \mu = k^2, \quad \operatorname{tg} kb = 0,$$

откуда $k = \frac{n \pi}{b}$. Для простейшего типа колебаний $n = 1$ пороговая частота

$$\omega_{\text{порог}} = \frac{\pi}{b \sqrt{(\epsilon - \epsilon_1) \mu}}. \quad (10.6)$$

При $\epsilon \gg \epsilon_1$ выражение для пороговой частоты совпадает с выражением для критической частоты при наличии проводящих сте-

нок. Что касается постоянной распространения $\gamma = \sqrt{k_1^2 - \omega^2 \epsilon_1 \mu}$, то на пороговой частоте ($k_1 = 0$) значение $\gamma = i\alpha = i\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu}$, иначе длина волны в волноводе $\lambda_g = 2\pi/\alpha$ определяется оптически менее плотной средой. В этом случае энергия распространяется в основном по оптически менее плотной среде ($\epsilon_1 < \epsilon$).

Используя понятие пороговой частоты, выражение (10.5) можно представить в виде

$$k_1 = \sqrt{(\omega_{порог}^2 - \omega^2)(\epsilon - \epsilon_1)\mu}.$$

Большой интерес представляет случай $\omega \gg \omega_{порог}$. В этом случае k_1 является мнимой величиной $k_1 \approx i\omega \sqrt{(\epsilon - \epsilon_1)\mu}$, причём $|k_1| \gg k = \omega_{порог} \sqrt{(\epsilon - \epsilon_1)\mu}$. Отсюда можно сделать два вывода:

1) по обе стороны от пластины поле резко убывает по экспоненциальному закону;

2) поскольку вся энергия передаётся в основном по оптически более плотной среде (пластина), то и длина волны определяется оптически более плотной средой.

Последний вывод можно подтвердить, используя полученные выше соотношения. При $k_1 \gg k$ и $\epsilon > \epsilon_1$ соотношение (10.4) переходит в $\text{tg } kb \approx 0$, откуда $k = \frac{\pi}{b}$, а $\gamma = \sqrt{(\pi/b)^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \approx i\omega \sqrt{\epsilon \mu}$, т. е.

при $\omega \gg \omega_{порог}$ длина волны $\lambda_g = \frac{2\pi}{|\gamma|}$ и фазовая скорость $v_\phi = \left| \frac{\omega}{\gamma} \right|$ определяются оптически более плотной средой.

Диэлектрическая пластина при $\omega \gg \omega_{порог}$ является, таким образом, *примером системы, уменьшающей фазовую скорость*, в чём мы убедились на примере волн E . При $\omega \gg \omega_{порог}$ волны в воздухе *прижимаются к пластине* и распространяются со скоростью, которая *близка к скорости распространения в диэлектрике*.

Подобным же образом можно провести анализ для волн типа H в пластине. Исходными могут служить ур-ния (2.122), (2.123).

Качественно новых результатов не получится, если взять круглый диэлектрический волновод и рассмотреть случай симметричных волн. Несимметричные волны типа H (например, волна H_{11} в круглом диэлектрическом волноводе) существовать не могут и заменяются волнами HE_{11} , имеющими как продольную H_z , так и продольную E_z составляющие.

Диэлектрические волноводы не получили пока широкого применения вследствие заметных потерь энергии в диэлектриках, а также вследствие технических трудностей, возникающих при построении волноводных разветвлений.

§ 10.3. ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА ТИПА ГРЕБЁНКИ

Простейшей замедляющей системой является диэлектрическая пластина, рассмотренная в § 10.2. Ввиду отсутствия диэлектрика с большой диэлектрической проницаемостью и малыми потерями

его заменяют периодической структурой, выполненной из проводящих элементов. Примером может служить «гребёнка» (рис. 10.2), состоящая из ряда тонких металлических пластин, перпендикулярных оси распространения z и расположенных в направлении оси y от $y=0$ до $y=-h$. Пластины соединены между собой металлическим листом, расположенным в плоскости $y=-h$.

Всю систему в целом можно рассматривать как набор объёмных резонаторов, связанных между собой подобно цепочечной схеме. Известно, что, подбирая параметры элементов цепочечной схемы, в частности параметры колебательных контуров, можно обеспечить большую задержку сигналов, что здесь и имеет место.

По существу подобные же явления имеют место и в диэлектрической пластине, где в роли колебательных контуров выступают молекулы диэлектрика, приходящиеся в достаточно большом количестве на длину волны поля.

Очевидно, чем больше металлических перегородок приходится на длину волны системы (рис. 10.2), тем меньше разница в структурах поля вблизи «гребёнки» и диэлектрической пластины.

Имея в виду подобного рода предельный случай, найдём решение в виде E -волны для поля вблизи границы ($y \geq 0$) системы (рис. 10.2):

$$\left. \begin{aligned} E_z &= C e^{-iky} e^{i(\omega t - \alpha z)} = C e^{-Ky} e^{i(\omega t - \alpha z)} \\ H_x &= -\frac{i\omega\epsilon}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = i \frac{\omega\epsilon}{K} C e^{-Ky} e^{i(\omega t - \alpha z)} \end{aligned} \right\}, \quad (10.7)$$

где $ik = K$ характеризует убывание поля вдоль оси y у границы системы.

Из условия

$$\alpha^2 = \omega^2 \epsilon \mu - k^2 = \omega^2 \epsilon \mu + K^2 \quad (10.8)$$

или

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v_\phi}\right)^2 = -K^2 \quad (10.9)$$

получаем, что при $v_\phi < v$ величина $k^2 < 0$, т. е. число k является мнимым, а $K = ik$ — вещественным.

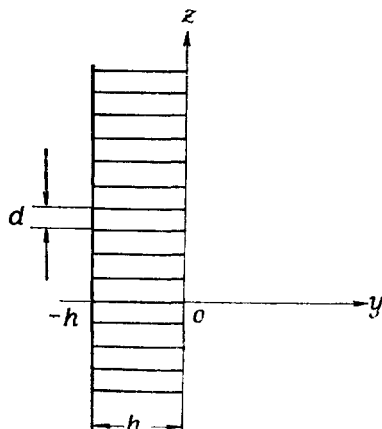


Рис. 10.2. Замедляющая система типа „гребёнки“

Решение (10.7) для границы с гребёнкой можно рассматривать лишь как приближённое, справедливое при $d \ll \lambda$, так как в этом решении E_z и H_x как функции z меняются непрерывно, в то время как в действительности они меняются при $y = 0$ скачками от одной пары листов к другой. Для области $y \leq 0$, где имеет место стоячая волна TEM в ленточной линии, можно записать

$$\frac{E_z}{-H_x} = i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \operatorname{tg} \alpha_0 (y + h). \quad (10.10)$$

Знак минус перед H_x связан с тем, что не векторы E_z и H_x , а векторы E_z и $-H_x$ образуют правовинтовую тройку с нормалью в сторону закороченной линии.

Приравнивая для $y = 0$ значения отношения $E_z / -H_x$, вытекающие из (10.7) и (10.10), получим

$$i \frac{K}{\omega \epsilon} = i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \operatorname{tg} \alpha_0 h,$$

откуда постоянная убывания поля по нормали к гребёнке

$$K = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \operatorname{tg} \alpha_0 h = \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_0 h. \quad (10.11)$$

Фазовая постоянная α определяется из соотношения (10.8)

$$\alpha = \sqrt{\alpha_0^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0 h)} = \alpha_0 \sec \alpha_0 h, \quad (10.12)$$

откуда фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\alpha} = v \cos \alpha_0 h = v \cos \frac{2\pi}{\lambda} h. \quad (10.13)$$

Выбирая нужное значение h/λ , можно соответствующим образом понизить фазовую скорость.

Отметим, что для случая больших замедлений, когда $v_\phi \ll v$, из равенства (10.9) можно получить

$$K \approx \frac{\omega}{v_\phi}. \quad (10.14)$$

Из соотношения (10.14) следует, что чем меньше фазовая скорость (или больше замедление), тем больше коэффициент K и, значит, тем сильнее прижимается поле вблизи замедляющей структуры, характеризуемое множителем e^{-Ky} , к поверхности этой структуры.

Подобное явление уже отмечалось для диэлектрического волновода и является общей закономерностью замедляющих систем.

Наглядно его можно проиллюстрировать тем, что с увеличением замедления растёт длина волны, а вместе с ней расстояние между разноимёнными зарядами на наружной границе замедляющей

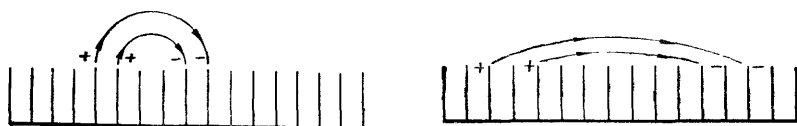


Рис. 10.3. Характер поля на границе замедляющей структуры

структуры (рис. 10.3). Линии электрического поля, соединяющие эти заряды, растягиваются и прижимаются к поверхности.

§ 10.4. СПИРАЛЬНАЯ ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА

Весьма широко в качестве замедляющей системы используется спираль (рис. 10.4), в которой замедление определяется обычно отношением шага h к длине окружности πD или, иначе, тан-

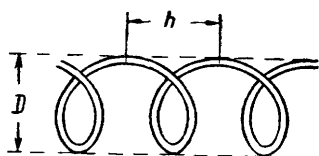


Рис. 10.4. Замедляющая система типа „спираль“

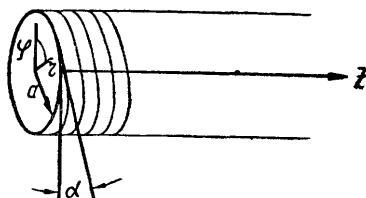


Рис. 10.5. Замедляющая система типа «анизотропно-проводящий цилиндр»

генсом угла наклона витков спирали к окружности поперечного сечения

$$\frac{h}{\pi D} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.15)$$

Ввиду того, что решение граничной задачи с учётом точной конфигурации витков спирали встречает значительные трудности, часто пользуются моделью спирали в виде анизотропно-проводящего цилиндра (рис. 10.5). Имеется в виду такой цилиндр, который имеет проводимость на любой точке поверхности $r=a$, но только под углом α к окружности поперечного сечения, в направлении витков моделируемой спирали. Таким образом, модель (рис. 10.5) не отражает детали поля, связанные с дискретностью витков, но отражает общие особенности, связанные с характером протекания токов по спирали. Модель тем точнее описывает поле, чем больше витков приходится на длину волны в продольном направлении.

Граничные условия на поверхности такого цилиндра сводятся

1) к равенству нулю тангенциальных составляющих электрического поля в направлении анизотропной проводимости,

2) к равенству между собой любых тангенциальных составляющих электрического поля по обе стороны от поверхности цилиндра,

3) к равенству между собой тангенциальных составляющих магнитного поля в направлении анизотропной проводимости (т. е. иначе, в направлении поверхностных токов).

Кроме граничных условий, поле внутри и вне цилиндра подчиняется следующим требованиям:

1) поле должно быть конечно на оси цилиндра,

2) поле должно убывать снаружи цилиндра и при $r \rightarrow \infty$ обращаться в нуль.

Условимся рассматривать простейшие волны с распределением поля, не зависящим от угла φ . Тогда можно написать следующие решения для продольных составляющих поля:

при $r \leq a$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= A I_0(Kr) e^{i(\omega t - az)} \\ H_z &= M I_0(Kr) e^{i(\omega t - az)} \end{aligned} \right\}, \quad (10.16)$$

при $r \geq a$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= B K_0(Kr) e^{i(\omega t - az)} \\ H_z &= N K_0(Kr) e^{i(\omega t - az)} \end{aligned} \right\}. \quad (10.17)$$

При написании ур-ний (10.16) и (10.17) учтено, что собственное число k , в соответствии с справедливым и здесь соотношением (10.9), при $v_\phi < v$ является мнимым, а число $K = ik$ — вещественным. Поэтому в ур-ния (10.16) и (10.17) вошли модифицированные функции Бесселя $I_0(u)$ и $K_0(u)$, которые при $u \gg 1$ с точностью до постоянного множителя и множителя $\frac{1}{\sqrt{u}}$ ведут себя

соответственно как e^u и e^{-u} . В такой записи решения удовлетворяют требованиям на оси цилиндра и на бесконечности.

Поперечные составляющие поля, как и ранее, выражаются через продольные. Учитывая соотношение $ik = K$, получим

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{i a}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ H_r &= \frac{i a}{K^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ E_\varphi &= -\frac{i \omega \mu}{K^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_\varphi &= \frac{i \omega \varepsilon}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \end{aligned} \right\}. \quad (10.18)$$

Обозначая составляющие поля при $r=a$ внутри и вне цилиндра индексами 1 и 2, в соответствии со сформулированными выше положениями, запишем граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi 1} \cos \alpha + E_{z1} \sin \alpha &= 0 \\ E_{\varphi 2} \cos \alpha + E_{z2} \sin \alpha &= 0 \\ E_{z1} &= E_{z2} \\ H_{\varphi 1} \cos \alpha + H_{z1} \sin \alpha &= H_{\varphi 2} \cos \alpha + H_{z2} \sin \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (10.19)$$

Подставляя в равенства (10.19) значения составляющих поля и поделив эти равенства на $\cos \alpha$ и экспоненциальный множитель $e^{i(\omega t - \alpha z)}$, получим:

$$-\frac{i \omega \mu}{K} M I_0'(Ka) + A I_0(Ka) \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (10.20)$$

$$-\frac{i \omega \rho}{K} N K_0'(Ka) + B K_0(Ka) \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (10.21)$$

$$A I_0(Ka) = B K_0(Ka), \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{i \omega \varepsilon}{K} A I_0'(Ka) + M I_0(Ka) \operatorname{tg} \alpha &= \\ &= \frac{i \omega \varepsilon}{K} B K_0'(Ka) + N K_0(Ka) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Сопоставляя соотношения (10.20) и (10.21), с учётом соотношения (10.22) получим

$$M I_0'(Ka) = N K_0'(Ka). \quad (10.24)$$

Заменяя в (10.23) A через M при помощи соотношения (10.20) а B через N при помощи соотношения (10.21), найдём

$$\begin{aligned} M \left\{ -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{K^2} \frac{[I_0'(Ka)]^2}{I_0(Ka)} \operatorname{ctg} \alpha + I_0(Ka) \operatorname{tg} \alpha \right\} &= \\ &= N \left\{ -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{K^2} \frac{[K_0'(Ka)]^2}{K_0(Ka)} \operatorname{ctg} \alpha + K_0(Ka) \operatorname{tg} \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая связь M и N согласно отношению (10.24), и произведя преобразования, получим

$$\omega \sqrt{\varepsilon \mu} = K \operatorname{tg} \alpha \sqrt{-\frac{I_0(Ka) K_0(Ka)}{I_0'(Ka) K_0'(Ka)}}. \quad (10.25)$$

Уравнение (10.25) представляет собой трансцендентное уравнение для K относительно независимой переменной ω . Задаваясь

значениями K и определяя ω , можно построить соответствующую кривую $\omega = \omega(K)$, из которой для каждого значения ω можно найти $v_\phi \approx \omega/K$. При $Ka \gg 1$ (случай больших замедлений и достаточно высоких частот), когда справедлива экспоненциальная аппроксимация модифицированных бесселевых функций, получим

$$\omega \sqrt{\epsilon \mu} \approx K \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$v_\phi \approx \frac{\omega}{K} \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \operatorname{tg} \alpha, \quad (10.26)$$

что соответствует соотношению (10.15), написанному из общих соображений. На более низких частотах фазовая скорость повышается.

§ 10.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ (СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ЗАМЕДЛЕНИЙ)

Хотя каждая из рассмотренных замедляющих систем имеет свои особенности, возбуждение их характеризуется общими закономерностями.

При расчёте возбуждения замедляющих систем продольным током $I(z)$ можно пользоваться ур-ниями (8.83), (8.84). Если замедление большое, то для любой замедляющей системы

$$\alpha^2 = \left(\frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 \gg \alpha_0^2 = \left(\frac{\omega}{v} \right)^2, \quad \text{а} \quad k^2 = \gamma^2 + \alpha_0^2 \approx \gamma^2.$$

Для этого случая найдём:

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} - \gamma^2 \dot{E}_z = -\gamma \rho_s \frac{d^2 f}{dz^2}. \quad (10.27)$$

$$\rho_s = \rho_E \frac{f^2(x_0, y_0)}{\gamma^2} = \rho_E \frac{|f(x_0, y_0)|^2}{\alpha^2}. \quad (10.28)$$

При написании ур-ния (10.28) учтено, что $\gamma = i\alpha$ и что в силу ур-ния (8.84) при вещественных $F(x, y)$ и $G(x, y)$ функция $f(x_0, y_0) = i|f(x_0, y_0)|$, т. е. выражается мнимым числом. Умножая числитель и знаменатель дроби в правой части равенства (10.28) на квадрат модуля скалярной комплексной амплитуды $|\dot{h}|^2$ и замечая, что $|\rho_E \dot{h}(z) f(x_0, y_0)| = |\dot{E}_z(x_0, y_0, z)| = E_{zm}$, а $\rho_E |\dot{h}|^2 = 2P$, получим выражения для эквивалентного волнового сопротивления замедляющей системы

$$\rho_s \approx \frac{E_{zm}^2}{2\alpha^2 P}. \quad (10.29)$$

Формулы (10.27) и (10.29) широко используются в теории электронных приборов бегущей волны.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

§ 11.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В последнее время наряду с изотропными большое значение приобретают *анизотропные* волноводные системы, т. е. волноводные системы, в которых условия распространения электромагнитных волн существенно зависят от направления распространения. Наиболее важное значение имеют:

1) замедляющие системы с электронными потоками, которые используются в современных электронных приборах бегущей волны, применяемых для целей усиления и генерирования колебаний свч;

2) волноводы, частично заполненные ферритами, применяемые для целей разделения и коммутации электромагнитной энергии, распространяющейся по волноводному тракту.

В основе анализа анизотропных волноводных систем лежат соотношения, подобные тем, которые использовались в предыдущих главах книги, но учитывающие анизотропию среды.

§ 11.2. ЭЛЕКТРОННЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ

Как видно из ур-ния (10.27), сгруппированный электронный поток $\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \neq 0\right)$ возбуждает колебания в замедляющей системе. С другой стороны, продольная составляющая электрического поля E_z вызывает группирование электронного потока. Благодаря этому создаются условия для *нарастания* колебаний вдоль замедляющей системы.

Предварительно выясним основные закономерности *группирования* вдоль оси z на простейшем примере *однородного электронного потока* $\left(\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$, которое происходит под дей-

ствием продольной составляющей электрического поля. Взаимным расталкиванием электронов пренебрегаем или считаем, что оно скомпенсировано фокусирующим магнитным полем. Обозначая скорость электрона $v_0 + v(z, t)$, где v_0 — постоянная, а $v(z, t)$ — переменная составляющая, уравнение движения электрона запишем в виде

$$m \frac{d}{dt} [v_0 + v(z, t)] = e E_z, \quad (11.1)$$

где e — заряд электрона (с учётом знака). Если для плотности объёмного заряда использовать запись $q_0 + q(z, t)$, то плотность электронного тока можно записать в виде

$$j_0 + j(z, t) = [q_0 + q(z, t)] [v_0 + v(z, t)]. \quad (11.2)$$

Далее можно воспользоваться уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} [j_0 + j(z, t)] = - \frac{\partial}{\partial t} [(q_0 + q(z, t))], \quad (11.3)$$

показывающим, что скопление заряда в произвольном сечении $z = \text{const}$ происходит из-за неравенства притекающего и утекающего токов. Обратим внимание на то, что в ур-нии (11.3) берётся частная производная по t , поскольку речь идёт о фиксированной точке с координатой z . В уравнение же (11.1) входит полная производная ввиду того, что речь идёт о фиксированном электро-не, для которого z изменяется как функция времени, причём $\frac{dz}{dt} = v_0 + v(z, t)$. Используя правило дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{dv(z, t)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = [v_0 + v(z, t)] \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Для стационарного режима полагаем $E_z(z, t) = \dot{E}_z(z) e^{i\omega t}$,

$$j(z, t) = \dot{j}(z) e^{i\omega t}, q(z, t) = \dot{q}(z) e^{i\omega t}, v(z, t) = \dot{v}(z) e^{i\omega t}.$$

Тогда дифференцирование по времени переменных составляющих заменяется умножением на $i\omega$. Дифференцирование по времени постоянных составляющих даёт нуль; кроме того, имеем

$$j_0 = q_0 v_0. \quad (11.4)$$

Из ур-ний (11.1), (11.2), (11.4) найдём

$$(v_0 + v) \frac{d\dot{v}}{dz} + i\omega \dot{v} = \frac{e}{m} E_z,$$

$$\dot{j} = \dot{q} v_0 + \dot{v} q_0 + \dot{q} \dot{v},$$

$$\frac{d\dot{j}}{dz} = -i\omega \dot{q}.$$

Полученная система является *нелинейной*, но в случае *малых амплитуд* колебаний, когда $|\dot{v}| \ll v_0$, а $|q| \ll q_0$, *система переходит в линейную*.

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } v_0 \frac{d\dot{v}}{dz} + i\omega \dot{v} &= \frac{e}{m} E_z \\ \text{б) } \dot{j} &= \dot{q} v_0 + \dot{v} q_0 \\ \text{в) } \frac{d\dot{j}}{dz} &= -i\omega \dot{q} \end{aligned} \right\}. \quad (11.5)$$

Исключая $\dot{q}$ в ур-нии (11.5б) при помощи ур-ния (11.5в), найдём, что

$$\dot{v} = \frac{v_0}{i\omega q_0} \left(\frac{d}{dz} + \frac{i\omega}{v_0} \right) j, \quad (11.6)$$

подставляя (11.6) в (11.5) и учитывая (11.4), получим дифференциальное уравнение для плотности группированного тока

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{i\omega}{v_0} \right)^2 j = -\frac{i\omega j_0}{v_0^3} \frac{e}{m} \dot{E}_z. \quad (11.7)$$

Дифференциальное ур-ние (11.7) характеризует волны плотности тока, возникающие под действием поля E_z . Вводя постоянную $\gamma_e = i\frac{\omega}{v_0}$, одновременно умножим обе части равенства (11.7) на площадь S некоторого выделенного участка электронного потока и учтём, что $\frac{mv_0^2}{2} = |e|U_0$, где U_0 — разность потенциалов, при помощи которой произведено ускорение электрона до скорости v_0 . Заменяя $jS = I$, а $j_0 S = -I_0$, получим дифференциальное уравнение для продольного тока

$$\left(\frac{d}{dz} + \gamma_e \right)^2 I = -\gamma_e \frac{I_0}{2U_0} \dot{E}_z. \quad (11.8)$$

Решения ур-ний (11.7), (11.8) для участков, где $E_z = 0$, описывают, в частности, нарастающие волны тока: $I e^{i\omega t} = A(z - z_0) e^{i\omega \left(t - \frac{z - z_0}{v_0} \right)}$. Линейное нарастание амплитуды по координате z связано с группированием электронов (более быстрые электроны догоняют более медленные). Модуляция же скорости электронов происходит на участках, где $E_z \neq 0$.

§ 11.3. ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА С ОСЕВЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

В первом приближении за уравнение группирования электронного пучка в замедляющей системе примем ур-ние (11.8), выведенное для однородного электронного потока. Имеем систему двух уравнений — ур-ние (11.8) группирования электронов и ур-ние (10.27) возбуждения колебаний в замедляющей системе:

$$\left. \begin{aligned} a) \left(\frac{d}{dz} + \gamma_e \right)^2 \dot{I} &= -\gamma_e \frac{I_0}{2 U_0} \dot{E}_z^1) \\ б) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right) \dot{E}_z &= -\gamma \rho_e \frac{d^2}{dz^2} I \end{aligned} \right\}. \quad (11.9)$$

Умножая ур-ние (11.9а) на оператор $-\gamma \rho_e \frac{d^2}{dz^2}$, а ур-ние (11.9б) на оператор $\left(\frac{d}{dz} - \gamma_e \right)$ (т. е. производя соответствующие операции дифференцирования) и складывая уравнения, находим линейное дифференциальное уравнение для $\dot{E}_z$ четвёртого порядка

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \gamma_e \right)^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right) \dot{E}_z &= \\ &= \frac{I_0 \rho_e}{2 U_0} \gamma_e \gamma \frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Общее решение этого уравнения складывается из четырёх линейно независимых решений

$$\dot{E}_z = A_1 e^{-\Gamma_1 z} + A_2 e^{-\Gamma_2 z} + A_3 e^{-\Gamma_3 z} + A_4 e^{-\Gamma_4 z}, \quad (11.11)$$

которым соответствуют четыре волны с разными значениями постоянных распространения $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$. Эти значения определяются как корни характеристического уравнения

$$(-\Gamma + \gamma_e)^2 (\Gamma^2 - \gamma^2) = \frac{I_0 \rho_e}{2 U_0} \gamma_e \gamma \Gamma^2 = -2 C^3 \gamma_e \gamma \Gamma^2. \quad (11.12)$$

Корни найдём методом последовательных приближений, полагая, что величина $C = \sqrt[3]{\frac{I_0 \rho_e}{4 U_0}}$ является малым параметром

¹⁾ При более строгом рассмотрении нужно учесть не только группирующее действие переменной составляющей E_z волны основного типа, но и соответствующих составляющих волн высших типов. Сумму последних можно отождествить с силой кулоновского взаимодействия, отнесённой к единице заряда.

задачи. Полагая в нулевом приближении $C = 0$, находим, что $\Gamma_{1,2} = \gamma_e$, $\Gamma_{3,4} = \pm \gamma$ (так как правая часть равенства обращается в нуль). Принимая в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \gamma_e + \xi_1, & \Gamma_3 &= \gamma + \xi_3 \\ \Gamma_2 &= \gamma_e + \xi_2, & \Gamma_4 &= -\gamma + \xi_4 \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

и учитывая, что $|\xi_1| \ll |\gamma_e|$, $|\xi_3| \ll |\gamma_e|$ и т. д., можно далее найти выражения для малых поправок ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4 по отношению к решениям нулевого приближения.

Расчёт произведём для *частного случая* $\gamma_e = \gamma$, когда постоянная составляющая скорости потока электронов совпадает с фазовой скоростью волны в замедляющей системе при отсутствии электронов. Заменяя в (11.12) $\Gamma = \gamma_e + \xi_1 = \gamma + \xi_1$, для определения ξ_1 находим уравнение

$$\xi_1^3 (2\gamma + \xi_1) = -2C^3 \gamma^2 (\gamma + \xi_1)^2.$$

Легко убедиться, что такое же уравнение получится после замены $\Gamma = \gamma + \xi_2$, $\Gamma = \gamma + \xi_3$. Поэтому для определения $\xi_{1,2,3}$ получаем одно уравнение, которое с учётом того, что $|\xi_{1,2,3}| \ll \gamma$, принимает вид

$$\xi_{1,2,3}^3 \approx C^3 \gamma^3. \quad (11.14)$$

Аналогично находим, что

$$\xi_4 \approx -\frac{1}{4} C^3 \gamma. \quad (11.15)$$

Поскольку $\gamma^3 = (i\alpha)^3 = \alpha^3 e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\nu\right)}$, придавая ν значения 0, 1, 2 и извлекая из $C^3 \gamma^3$ кубический корень, находим:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= C \alpha e^{-\frac{1}{6}i\pi} = C \alpha \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = C \alpha (0,87 - i 0,5) \\ \xi_2 &= C \alpha e^{-\frac{1}{6}i5\pi} = C \alpha \left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = C \alpha (-0,87 - i 0,5) \\ \xi_3 &= C \alpha e^{-\frac{1}{6}i9\pi} = C \alpha e^{-\frac{3}{2}i\pi} = i C \alpha^1 \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

¹⁾ Других значений кубических корней быть не может, в чём легко убедиться, подставляя значения $\nu=3,4$ и т. д.

Свойства четырёх видов распространяющихся волн определяются постоянными распространения (11.13) с учётом найденных поправок $\xi_{1,2,3,4}$. Три волны являются *прямыми*, одна *обратной*. Весьма существенно, что у одной из прямых волн имеется *отрицательная реальная часть постоянной распространения*

$$\operatorname{Re} \Gamma_2 = -0,87 C \alpha = -\frac{2\pi 0,87 C}{\lambda_g},$$

где λ_g — длина волны в волноводной замедляющей системе.

Это значит, что такая волна *нарастает по амплитуде вдоль замедляющей системы*. Изменение амплитуды на расстоянии l определяется множителем

$$|e^{-\Gamma_2 l}| = e^{-\operatorname{Re} \Gamma_2 l} = e^{0,87 C \alpha l} = e^{\frac{2\pi 0,87 C l}{\lambda_g}}, \quad (11.17)$$

что соответствует усилению в децибелах

$$10 \lg |e^{-\Gamma_2 l}|^2 = 20 \frac{2\pi 0,87 C l}{\lambda_g} \lg e \approx 47,3 C \alpha \frac{l}{\lambda_g}. \quad (11.18)$$

Формула (11.18) характеризует *усилительное действие приборов бегущей волны*, получающих в настоящее время всё более широкое распространение¹⁾.

Следует отметить, что волноводная замедляющая система с электронным потоком является *анизотропной*. Ей свойственны различные постоянные распространения для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси z (даже разное число линейно независимых решений для таких волн 3 и 1). Последнее связано с *однонаправленным* движением электронного потока. Другим примером анизотропных волноводов являются волноводы, заполненные ферритом и находящиеся под воздействием постоянного магнитного поля.

§ 11.4. ОДНОРОДНАЯ ВОЛНА В НАМАГНИЧЕННОМ ФЕРРИТЕ

Ферриты в настоящее время начинают находить всё более широкое применение в волноводной технике. Благодаря их использованию, был разработан ряд необратимых волноводных устройств (не удовлетворяющих теореме взаимности), которые обладают весьма ценными свойствами.

¹⁾ При выводе ф-лы (11.18) не учтены потери (9,5 дБ), связанные с тем, что амплитуда нарастающей волны в начале прибора равна 1/3 суммарной амплитуды (в силу близости Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 амплитуды трёх волн в начале лампы примерно одинаковы, амплитуда обратной волны равна нулю при условии согласования выхода лампы).

Простейшие ферриты представляют собой смешанные оксиды трёхвалентного железа и двухвалентного металла, в частности, никеля, марганца, меди, кобальта и т. д. с химической формулой вида $MOFe_2O_3$, где M — символ двухвалентного металла. Оказывается, что лучшие свойства имеют сложные ферриты, состоящие из ферритов никеля, марганца, магния или меди, обладающих ферромагнитными свойствами, и ферритов цинка и кадмия, не обладающих ферромагнитными свойствами. Наибольшее распространение получили *никель-цинковые* и *марганец-цинковые* ферриты. Ферриты имеют мелкозернистую кристаллическую структуру, которая получается при спекании, и по механическим свойствам приближаются к керамике. Обладая высокой относительной *магнитной проницаемостью* от 10 до 2000, ферриты в то же время характеризуются *высоким удельным сопротивлением* обычно от 10^6 до 10^8 *ом.см.*, что примерно в 10^{11} — 10^{13} раз выше, чем для стали. Если сталь на границе раздела с воздухом является для радиоволны идеальным отражателем, то *феррит может пропускать через себя волну без значительного отражения и без значительных потерь*. Для ферритов характерна в то же время высокая диэлектрическая проницаемость (обычно порядка 10—20), что нужно учитывать при согласовании.

Магнитная проницаемость ферритов в диапазоне свч определяется *гироскопическими* свойствами электронов.

Согласно современным воззрениям, электрон обладает механическим и магнитным моментами, которые можно пояснить вращением массы и заряда электронов (спины электронов). Обычно такие электроны группируются в пары с противоположным направлением вращения и не приводят к магнитным эффектам. Магнитные свойства ферромагнетиков связаны с наличием нескомпенсированных спинов внешних электронов в ионах металла.

Под действием постоянного магнитного поля спины стремятся ориентироваться вдоль приложенного магнитного поля. Если ось вращения электрона мгновенно отклонить, то она не сразу вернётся в исходное положение, а будет совершать прецессию, подобно тому, как это имеет место для гироскопа. Прецессия совершается за счёт вращающего момента $[M_s, H_0]$, действующего на электрон, где M_s — его магнитный момент, а H_0 — напряжённость магнитного поля. На рис. 11.1а показано направление прецессии, совпадающее с направлением вызывающего его момента. Под действием вращающего момента меняется механический момент электрона K_s (главный момент количества движения), производная которого по времени, согласно соответствующей теореме механики, равна вращающему моменту¹⁾

$$\frac{dK_s}{dt} = [M_s, H_0], \quad (11.19)$$

¹⁾ См., например, Л. Т. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. ГИТТЛ, 1948, стр. 120.

т. е. электрон прецессирует. Между магнитным и электрическим моментами электрона существует пропорциональная зависимость, так как один связан с вращением массы, а другой — заряда электрона

$$M_s = -\chi K_s. \quad (11.20)$$

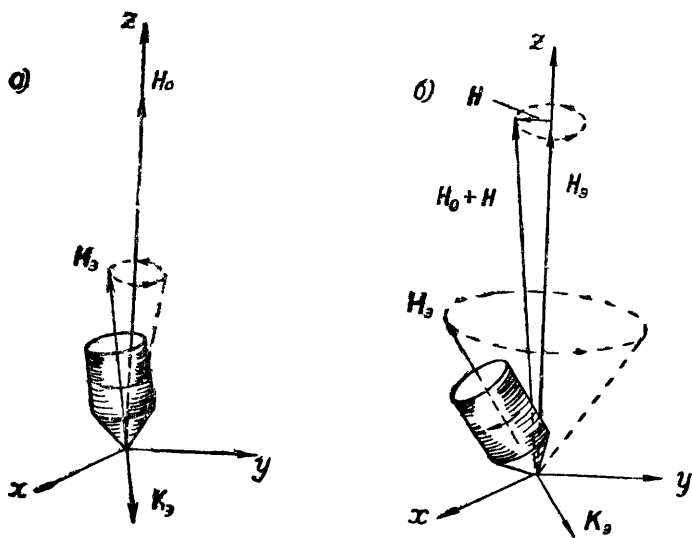


Рис. 11.1. Иллюстрация прецессии электронов при свободных и вынужденных колебаниях

Здесь величина χ называется *гиромагнитным отношением*¹⁾; знак минус связан с тем, что заряд электрона отрицателен. Тогда

1) Пусть по окружности радиуса a вращается заряд e , равномерно распределённый по длине окружности с плотностью $\frac{e}{2\pi a}$. Это равносильно протеканию кольцевого тока $\left(\frac{e}{2\pi a}\right)v_0$, где v_0 — скорость движения заряда по окружности. Известно, что магнитный момент витка с током I_0 радиуса a равен $\mu_0 \pi a^2 I_0$. Поэтому магнитный момент вращающегося заряда будет $\mu_0 \pi a^2 \left(\frac{e}{2\pi a}\right)v_0 = \frac{\mu_0 e a v_0}{2}$. В свою очередь, момент количества движения вращающейся массы m , распределённой по окружности радиуса a , равен $m v_0 a$. Отношение магнитного момента к моменту количества движения для орбитального движения равно, таким образом, $\mu_0 \frac{e}{2m}$. Оставаясь в рамках классических представлений, это отношение можно было бы применить к электрону, считая, что распределение заряда в нём совпадает с распределением массы. По данным эксперимента, однако, имеет место вдвое большее гиромагнитное отношение $\chi = \mu_0 \frac{e}{m}$, что объясняется квантовой теорией.

приходим к дифференциальному уравнению для магнитного момента электрона

$$\frac{d\mathbf{M}_s}{dt} = -\gamma [\mathbf{M}_s, \mathbf{H}_0]. \quad (11.21)$$

Вводя оси x и y перпендикулярно приложенному полю и полагая $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}^0$, получим

$$\frac{dM_{sx}}{dt} = -\gamma H_0 M_{sy}, \quad \frac{dM_{sy}}{dt} = \gamma H_0 M_{sx},$$

откуда, заменяя дифференцирование по времени умножением на $i\omega_0$, находим *собственную частоту* прецессионного движения

$$\omega_0 = \gamma H_0, \quad (11.22)$$

пропорциональную напряжённости приложенного магнитного поля.

Перейдём далее к случаю, когда феррит насыщен ориентированным вдоль оси z постоянным полем напряжённости $\mathbf{H}_0$ и по нему вдоль направления этого поля распространяется волна, поляризованная по кругу с вектором напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}$. Рис. 11.1б иллюстрирует вращение суммарного магнитного поля $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}$ и соответствующую ему прецессию оси электрона. Обозначая результирующий момент электрона $\mathbf{M}_s + \Delta \mathbf{M}_s$, вместо выражения (11.21), для режима вынужденных колебаний получим

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{M}_s + \Delta \mathbf{M}_s) = -\gamma [(\mathbf{M}_s + \Delta \mathbf{M}_s) (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H})]. \quad (11.23)$$

Вычитая из (11.23) ур-ние (11.21), соответствующее режиму свободных колебаний, оставляем лишь члены, характеризующие стационарный режим,

$$\frac{d(\Delta \mathbf{M}_s)}{dt} + \gamma [\Delta \mathbf{M}_s, \mathbf{H}_0] = -\gamma [\mathbf{M}_s, \mathbf{H}] - \gamma [\Delta \mathbf{M}_s, \mathbf{H}].$$

Полагая $|\mathbf{H}| \ll H_0$ и $|\Delta \mathbf{M}_s| \ll |\mathbf{M}_s|$, как и в теории приборов бегущей волны, пренебрежём малым нелинейным членом (в данном случае $-\gamma [\Delta \mathbf{M}_s, \mathbf{H}]$). Умножая на число электронов в единице объёма N и обозначая суммарные магнитные моменты $\mathbf{M} = N\mathbf{M}_s$ и $\mathbf{m} = N\Delta \mathbf{M}_s$, найдём дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} + \gamma [\mathbf{m}, \mathbf{H}_0] = -\gamma [\mathbf{M}, \mathbf{H}], \quad (11.24)$$

характеризующее магнитный момент единицы объёма, изменяющийся с частотой приложенного поля.

Для любого пространственного вектора, равномерно вращающегося по часовой стрелке (если смотреть вдоль направления вектора постоянного магнитного поля, характеризуемого ортом $\mathbf{z}^0$), производная по времени равна векторному произведению вектора $\omega = \omega \mathbf{z}^0$ на данный вектор¹⁾. Тогда, после замен $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z}^0$ и $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{z}^0$ уравнение (11.24) преобразуется к виду

$$[\mathbf{z}^0 (-\omega + \chi H_0) \mathbf{m}] = [\mathbf{z}^0 (-\chi M_0) \mathbf{H}].$$

Здесь учтено, что феррит насыщен и потому векторы $\mathbf{M}$ в стационарном режиме направлены вдоль оси $\mathbf{z}$.

Поскольку векторы переменного поля по условию поперечны и не имеют $\mathbf{z}$ -й составляющей, отсюда следует, что

$$(-\omega + \chi H_0) \mathbf{m} = -\chi M_0 \mathbf{H}. \quad (11.25)$$

Полученное уравнение определяет переменную составляющую магнитного момента единицы объёма $\mathbf{m}$ в зависимости от переменной составляющей напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}$. Тогда переменная составляющая магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_{эф} \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{m}. \quad (11.26)$$

Таким образом, эффективная магнитная проницаемость, т. е. относительная проницаемость для переменного поля с вращением плоскости поляризации по часовой стрелке, будет

$$\mu_{эф} = \mu_+ = 1 - \frac{\chi M_0}{\mu_0 (\chi H_0 - \omega)}. \quad (11.27)$$

Формула (11.27) отражает явление *ферромагнитного резонанса*. При $\omega = \chi H_0 = \omega_0$, т. е. когда частота возбуждающего поля равна собственной частоте прецессионного движения, значение $\mu_{эф}$, согласно ф-ле (11.27), обращается в бесконечность. В действительности это, конечно, не имеет места, поскольку феррит обладает потерями, не учтёнными в ходе проведённого расчёта. Частоту $\omega_0 = \chi H_0$ называют *частотой ферромагнитного резонанса*. Существенно то обстоятельство, что при вращении плоскости поляризации против часовой стрелки значение $\mu_{эф}$ оказывается иным, т. е. $\mu_{эф} = \mu_-$. Не повторяя расчёта, значение μ_- можно получить, заменив в (11.27) ω на $-\omega$, тогда

$$\mu_{эф} = \mu_- = 1 - \frac{\chi M_0}{\mu_0 (\chi H_0 + \omega)}. \quad (11.28)$$

¹⁾ Действительно, если $\mathbf{m} = x^0 |\mathbf{m}| \cos \omega t + y^0 |\mathbf{m}| \sin \omega t$, то $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -x^0 |\mathbf{m}| \omega \sin \omega t + y^0 |\mathbf{m}| \omega \cos \omega t = \omega [\mathbf{z}^0 \mathbf{m}] = [\omega \mathbf{m}]$. Таким образом, для вращающихся пространственных векторов производные можно записать достаточно просто, не обращаясь к комплексным числам.

В частности, при частоте $\omega \gg \omega_0$

$$\mu_+ \approx 1 + \frac{\chi M_0}{\mu_0 \omega}, \quad \mu_- \approx 1 - \frac{\chi M_0}{\mu_0 \omega}.$$

Очевидно, что фазовые постоянные для волн с различным вращением плоскости поляризации будут неодинаковы. При $|\chi M_0 / \mu_0 \omega| \ll 1$, имеем:

$$\alpha_+ = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_+ \epsilon}} \approx \alpha_0 \left(1 - \frac{\chi M_0}{2\mu_0 \omega} \right),$$

$$\alpha_- = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_- \epsilon}} \approx \alpha_0 \left(1 + \frac{\chi M_0}{2\mu_0 \omega} \right),$$

откуда

$$\alpha_- - \alpha_+ = \frac{\chi M_0}{\mu_0 \omega}. \quad (11.29)$$

Известно, что волну с линейной поляризацией можно разбить на две волны, поляризованные по кругу с вращением в пространстве по часовой стрелке и против часовой стрелки. Рис. 11.2а ил-

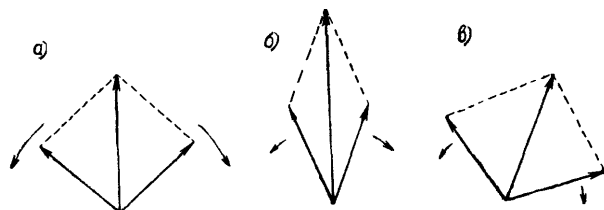


Рис. 11.2. Пояснение поворота плоскости поляризации линейно-поляризованного колебания

люстрирует это, показывая, что при наложении двух вращающихся векторов с амплитудой $E_m/2$ получается пульсирующий вектор амплитуды E_m . Если сдвинуть по фазе каждый из вращающихся векторов, но оба в одну сторону, например, в сторону отставания, изменится фаза результирующего вектора, поляризация же его не изменится (рис. 11.2б). Если же вращающиеся векторы изменить по фазе неодинаково, сдвинув один на $\varphi/2$ в сторону опережения, а другой на $\varphi/2$ в сторону отставания, то поляризация изменится на $\varphi/2$ (рис. 11.2в), а фаза не изменится. Таким образом, разность в сдвиге фаз на φ приводит к изменению плоскости поляризации на $\varphi/2$.

Этим объясняется *эффект Фарадея*, который состоит в том, что плоскость поляризации линейно-поляризованного колебания, рас-

пространяющегося в феррите по оси z , вдоль которой действует постоянное магнитное поле, поворачивается на угол

$$\frac{\alpha_- - \alpha_+}{2} z \quad (11.30)$$

по сравнению с сечением $z = 0$.

Замечательным свойством феррита является *необратимость фазового сдвига*. Скрученный участок волновода (рис. 4.37) также меняет плоскость поляризации, однако, если при движении волны слева направо плоскость поляризации поворачивается против часовой стрелки, то при движении справа налево — по часовой, так что прямая и отражённая волны в любом сечении поляризованы одинаково.

Иначе обстоит дело в случае феррита, представляющего собой *анизотропную* среду. Независимо от направления распространения, выбор постоянной α_- или α_+ для каждой из поляризованных по кругу волн связан с тем, *в какую сторону вращается переменное поле*, если смотреть на него *в направлении постоянного поля*. Поэтому, если для падающей волны линейно-поляризованный вектор вращается *вправо* при распространении волны в сторону положительных z , то он вращается *вправо* и при распространении в сторону отрицательных z , т. е. векторы падающей и отражённой волн поляризованы неодинаково. Система не удовлетворяет принципу взаимности. Причиной анизотропии является *приложенное постоянное магнитное поле* и связанная с ним *односторонняя прецессия электронов*.

Если в несколько более общем случае $\dot{H} = \dot{H}_x x^0 + \dot{H}_y y^0$, то заданное выражение можно преобразовать к виду

$$\dot{H} = \frac{\dot{H}_x - i \dot{H}_y}{2} (x^0 + i y^0) + \frac{\dot{H}_x + i \dot{H}_y}{2} (x^0 - i y^0),$$

т. е. соответствующую эллиптически поляризованную волну представить в виде суммы двух волн с круговой поляризацией. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{B}/\mu_0 &= \mu_+ \frac{\dot{H}_x - i \dot{H}_y}{2} (x^0 + i y^0) + \mu_- \frac{\dot{H}_x + i \dot{H}_y}{2} (x^0 - i y^0) = \\ &= x^0 (\mu_r \dot{H}_x - i q \dot{H}_y) + y^0 (i q \dot{H}_x + \mu_r \dot{H}_y), \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_r &= \frac{\mu_+ + \mu_-}{2} = 1 - \frac{\chi M_0 \omega_0}{\mu_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \\ q &= \frac{\mu_+ - \mu_-}{2} = - \frac{\chi M_0 \omega}{\mu_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

В наиболее общем случае имеется ещё составляющая переменного поля H_z вдоль оси z , т. е. $\dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_x \mathbf{x}^0 + \dot{H}_y \mathbf{y}^0 + \dot{H}_z \mathbf{z}^0$. Поскольку феррит предполагает насыщенный, составляющая $\dot{H}_z$ не изменит составляющих магнитной индукции вдоль осей x и y и произведёт такой же эффект вдоль оси z , что и при отсутствии спинов. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} B_x / \mu_0 &= \mu_r H_x - i q H_y \\ B_y / \mu_0 &= i q H_x + \mu_r H_y \\ B_z / \mu_0 &= H_z \end{aligned} \right\}. \quad (11.32)$$

Это значит, что переход от составляющих переменного магнитного поля H_x , H_y , H_z к составляющим B_x , B_y , B_z производится при помощи матрицы

$$\mu_0 \begin{vmatrix} \mu_r - i q & 0 \\ i q & \mu_r \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (11.33)$$

Знак минус в верхней строчке, т. е. неравенство элементов $a_{12} \neq a_{21}$ (в данном случае $a_{12} = -a_{21}$), связан с анизотропией среды.

§ 11.5. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ФЕРРИТОВ В ВОЛНОВОДНОЙ ТЕХНИКЕ

Использование ферритов привело за последнее время к созданию ряда новых элементов волноводной техники, к числу которых относятся *изоляторы*, *циркуляторы* и *направленные фазовращатели*. Все эти элементы отличаются тем, что они не удовлетворяют теореме взаимности, т. е. являются необратимыми.

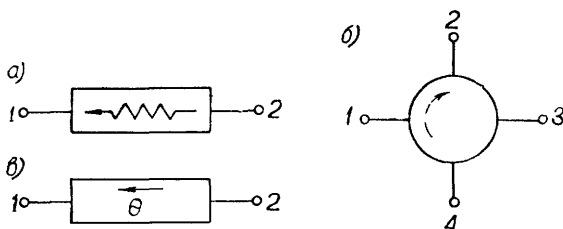


Рис. 11.3. Схематические изображения изолятора, циркулятора и направленного фазовращателя

Изолятор, схематически изображённый на рис. 11.3а, представляет собой устройство, осуществляющее передачу энергии от 1 к 2 практически без поглощения и полностью поглощающее энергию, идущую от 2 к 1. *Циркулятор*, схематически изображённый на рис. 11.3б, направляет мощность, поданную в плечо 1, практически без поглощения в плечо 2; мощность, поданная в плечо 2, направляется в плечо 3 (а не в плечо 1); мощность, поданная в плечо 3, идёт в плечо 4; мощность, поданная в плечо 4, идёт, наконец, в плечо 1. *Направленный фазовращатель*, схематически изобра-

ражённый на рис. 11.3в, обеспечивает фазовый сдвиг Θ в направлении от 2 к 1 при отсутствии фазового сдвига в направлении от 1 к 2. Последовательно с направленным фазовращателем можно включить любое устройство, обеспечивающее обратимый фазовый сдвиг φ : тогда в прямом направлении фазовый сдвиг будет φ , в обратном $\Theta + \varphi$; дополнительный сдвиг φ не является существенным. Разновидностью направленного фазовращателя является *гиратор*, для которого необратимый фазовый сдвиг равен 180° .

Один из возможных методов построения необратимых элементов заключается в использовании *эффекта Фарадея* в волноводных системах. Сам Фарадей наблюдал этот эффект для световых

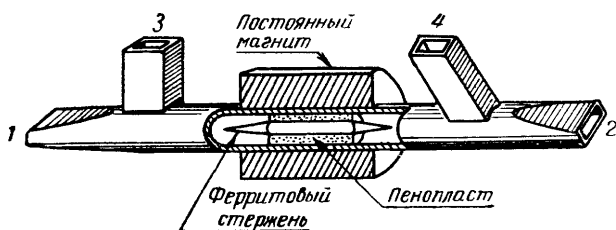


Рис. 11.4. Циркулятор, использующий эффект Фарадея

колебаний в анизотропном веществе. На рис. 11.4 изображена схема циркулятора, использующего эффект Фарадея. Циркулятор выполняется в виде участка круглого волновода, включённого между участками прямоугольного волновода 1 и 2, предназначенными для работы на волне основного типа, причём участок 2 повернут по часовой стрелке относительно участка 1 на 45° . Одновременно к круглому волноводу подключены участки прямоугольных волноводов 3 и 4, широкие стенки которых ориентированы вдоль оси системы, причём ось участка 3 перпендикулярна широкой стенке участка 1, а ось участка 4 перпендикулярна широкой стенке участка 2. Расположение плеча 3 таково, что волна, идущая из плеча 1, не может возбудить поля H_{01} в плече 3. В свою очередь, волна, идущая из плеча 2, не возбуждает поля в плече 4.

В круглом волноводe при помощи держателя из пенопласта ¹⁾ укреплен ферритовый стержень, сточенный по обоим концам на конус (в целях согласования). Постоянный магнит, окружающий круглый волновод, создаёт продольное магнитное поле. Вслед-

¹⁾ Пенопласт (пенополистирол) — вещество с ϵ , близким к ϵ_0 .

ствие этого линейно-поляризованная волна в круглом волноводе изменяет по мере прохождения через участок с ферритом свою плоскость поляризации. Параметры системы подобраны так, чтобы угол поворота был равен 45° (по часовой стрелке, если смотреть слева направо). Тогда волна, идущая из плеча 1, *беспрерывно* пройдёт в плечо 2, не попадая ни в плечо 3, ни в плечо 4. Наоборот, волна, идущая из плеча 2, которая также поворачивается на 45° по часовой стрелке, попасть в плечо 1 не может, так как вектор электрического поля этой волны будет параллелен широкой стенке волновода 1. Такая волна возбуждает плечо 3 и при выполнении условий согласования энергия из плеча 2 полностью идёт в плечо 3. Аналогично можно убедиться, что энергия из плеча 3 в результате поворота плоскости поляризации на участке с ферритом попадёт в плечо 4, а энергия из плеча 4 — в плечо 1. Итак, данная система является *циркулятором*.

Описанный циркулятор без плеч 3 и 4 можно рассматривать как изолятор, который передаёт энергию только от 1 к 2. Плечи 3 и 4 следует заменить поглощающими пластинками, предназначенными для поглощения энергии волн, поляризованных перпендикулярно по отношению к волнам на выходах 1 и 2. Если бы имело место полное поглощение в пластине 3, пластина 4 не была бы нужна. При неидеальном поглощении в пластине 3 пластина 4 повышает качество работы изолятора. Изоляторы, подобные рассмотренному, представляют большой интерес с точки зрения развязки генератора и несогласованной нагрузки. Известные недостатки рассмотренного выше изолятора связаны с зависимостью угла поворота от частоты и температуры. Оказывается, что при каскадном включении нескольких насыщенных ферритовых вставок и соответствующим образом расположенных поглотителей диапазон частот и температур изолятора расширяется.

Можно построить необратимые элементы, помещённые в *поперечное* магнитное поле, используя отрезки прямоугольного волновода, рассчитанные на передачу волн типа H_{01} . Дело в том, что для рассматриваемого типа колебаний вектор $\mathbf{H}$ в фиксированной точке x, y, z ($0 < y < b/2$), оставаясь параллельным широкой стенке волновода, в течение времени — по мере движения картины поля, изменяет своё направление в плоскости yz . Поляризация вектора $\mathbf{H}$ является в общем случае *эллиптической*. Уравнение эллипса вытекает из соотношений (4.52) и имеет вид:

$$\frac{H_y^2}{\left(H_{ym} \sin \frac{\pi}{b} y\right)^2} + \frac{H_z^2}{\left(H_{ym} \frac{\lambda_g}{2b} \cos \frac{\pi}{b} y\right)^2} = 1. \quad (11.34)$$

В частном случае, при $y = y_0$, где

$$y_0 = \frac{b}{\pi} \arctg \frac{\lambda_g}{2b}, \quad (11.35)$$

поляризация вектора $\mathbf{H}$ будет *круговой*, с правым вращением по одну сторону от плоскости $y=b/2$ и с левым вращением по другую. Для обратного на-

правления распространения волны характер вращения изменяется на противоположный.

При введении в волновод продольной пластинки феррита в сечение $y \approx y_0$ (рис. 11.5) фазовая постоянная изменится за счёт влияния диэлектрической и магнитной проницаемостей феррита. Однако за счёт влияния диэлектрической проницаемости фазовая постоянная изменится одинаково для обоих направлений распространения, а за счёт магнитной — различно, поскольку в одном случае $\mu_{эф} = \mu_+$, а в другом $\mu_{эф} = \mu_-$.

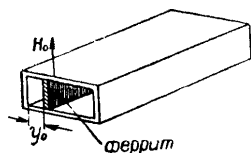


Рис. 11.5. Необратимый элемент с поперечным намагничивающим полем

Используя описанное явление, можно создать *направленный фазовращатель*, в котором невязимная разность фаз пропорциональна длине участка с ферритом. Когда эта разность фаз равна 180° .

Имеем гиратор. Включая гираторы в волноводный тракт, можно получать различные типы невязимных изоляторов и циркуляторов.

Гиратор можно получить также, поставив в прямоугольный волновод две ферритовые пластинки, например, в сечениях $y \approx y_0$ и $y \approx b - y_0$. Чтобы невязимные сдвиги фаз суммировались, статические подмагничивающие поля должны быть направлены противоположно.

Здесь мы не останавливаемся на особенностях волноводов с ферритами связанных с возможностью распространения нескольких типов волн.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛЕНТОЧНЫХ (ПОЛОСКОВЫХ) И РЕБРИСТЫХ ВОЛНОВОДАХ

§ 12.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В предшествующих главах не было уделено места двум типам волноводов, которые начинают получать за последнее время применение, а именно ленточным линиям (полосковым волноводам) и ребристым (Н-образным и П-образным) волноводам. Ниже излагаются краткие сведения об этих волноводах.

§ 12.2. ЛЕНТОЧНЫЕ ЛИНИИ (ПОЛОСКОВЫЕ ВОЛНОВОДЫ)

Волноводная аппаратура сантиметрового диапазона, требующая высокой точности при изготовлении, сравнительно дорога в производстве и зачастую недостаточно компактна. Коаксиальные линии ещё более сложны в производстве, в частности, в 3-сантиметровом диапазоне волн (особенно при использовании в качестве элементов мостовых схем). За последнее время появился ряд работ, посвящённых ленточным или «открытым коаксиальным» линиям. Такая линия образуется узкой лентой, укреплённой на фиксированном расстоянии над плоской широкой заземлённой поверхностью (более широкой лентой). Вместо узкой ленты может быть взят круглый проводник. На рис. 12.1 показаны поперечные сечения различных типов ленточных линий: а) в виде круглого проводника над широкой лентой с воздухом в качестве диэлектрика при наличии диэлектрических опор; б) то же, что и «а», но круглый проводник заменён узкой лентой; в) то же, что и «а», но с диэлектриком между проводом и широкой лентой; г) то же, что и «б», но с диэлектриком между лентами; д) то же, что и «г», но с дополнительной пластиной диэлектрика над линией для концентрации поля ближе к полоске (а значит, и уменьшения излучения); е) добавлена ещё одна широкая заземлённая лента для симметрирования и уменьшения излучения.

Наиболее просты для изготовления и поэтому более перспективны типы «в» и «г». В качестве диэлектрика применяют при этом полистирол или политетрафторэтилен, в качестве проводников — медь, латунь.

По сравнению с волноводом полосковые линии более широкополосны (так как они приближаются к коаксиальному кабелю), но вследствие использования диэлектрика не могут быть использованы для передачи больших мощностей.

Основной тип колебаний в ленточной линии можно *приближённо определить как TEM*.

Однако, строго говоря, чистой волны *TEM* быть не может. Даже между плоскостями с двухслойным диэлектриком не может распространяться волна *TEM*; легко проверить, что решения *TEM* не удовлетворяют граничным условиям. При попытке возбуждения волны *TEM* появится продольная составляющая электриче-

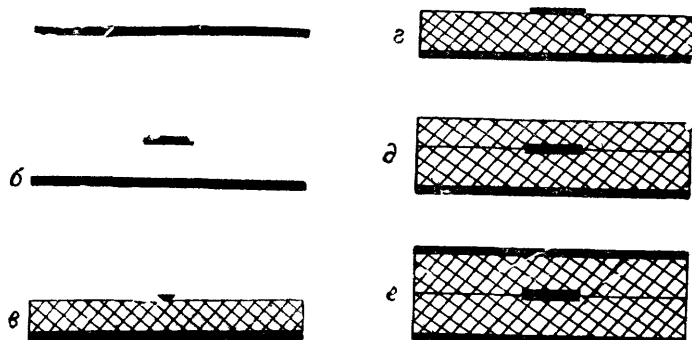


Рис. 12.1. Различные типы ленточных (полосковых) линий

ского поля¹⁾. Если за счёт выбора соотношения толщины слоёв добиться концентрации энергии преимущественно в одном слое (второй слой тонок), волна будет близка к волне типа *TEM*.

Аналогичные явления имеют место и для ленточных линий (полосковых волноводов). Волна близка к волне *TEM* потому, что основная часть энергии проходит в диэлектрике. Об этом можно судить по соотношению длины волны в воздухе, в ленточной линии и в диэлектрике, которое для одной из экспериментальных линий составляло 1 : 0,69 : 0,63. В настоящее время разрабатаны конструкции ряда узлов на полосковых линиях.

§ 12.3. РЕБРИСТЫЕ (Н-ОБРАЗНЫЕ И П-ОБРАЗНЫЕ) ВОЛНОВОДЫ

К числу ребристых волноводов принадлежат Н-образные и П-образные волноводы, представленные на рис. 3.1в, г. В некоторых случаях *ребристые* волноводы имеют преимущества перед

¹⁾ Среда с большей диэлектрической постоянной имеет большую ёмкостную проводимость, что приводит к ответвлению по ней вдоль направления распространения линий электрического поля. Более строго: граничные условия для D_n и H_t не выполняются одновременно на границе раздела.

прямоугольными. Это связано с тем, что при данных габаритах критическая частота основного типа колебаний оказывается значительно ниже, чем для прямоугольных волноводов.

Чтобы пояснить это обстоятельство, воспользуемся тем, что в силу соотношения (7.19) резонансная длина волны $\lambda_{рез}$ волноводного резонанса совпадает с критической длиной волны $\lambda_{кр}$ волновода, если при фиксированном p (например $p=1$) длина l стремится к бесконечности. Это значит, что *критическую частоту можно найти как резонансную при $\rightarrow \infty$, иначе при однородном поле вдоль оси z волновода (т. е. как частоту резонанса в поперечном сечении)*. Тогда, выделяя отрезок ребристого волновода единичной длины, критическую частоту можно приближённо найти по формуле

$$\omega_{кр} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}.$$

Здесь, как и в § 7.11, имеется в виду пространственное разделение электрического и магнитного полей. Точное значение $\omega_{кр}$ можно получить, определяя собственное число соответствующего мембранного уравнения.

Чем выше ёмкость C_s , тем ниже критическая частота. Это позволяет *понижить критическую частоту* при заданных габаритах S другой стороны, можно *уменьшить габариты* волновода при заданной рабочей частоте. Полоса частот, в которой может работать ребристый волновод, при этом оказывается *шире*, чем для прямоугольного волновода. Например, рабочий диапазон прямоугольного волновода с размерами $a=1,02$ см, $b=2,29$ см определяется критическими длинами волн $\lambda_{01}=2b=4,58$ см и $\lambda_{02}=2,29$ см. При введении двух рёбер шириной 0,92 см с зазором между рёбрами 0,36 см значение λ_{01} увеличивается до 6,85 см, значение же λ_{02} будет 2,17 см. Отношение $\lambda_{01}/\lambda_{02}$ увеличивается с 2 до 3,16.

Следует, однако, иметь в виду, что ребристые волноводы имеют более низкую допустимую мощность, большее затухание и требуют более жёстких допусков при изготовлении, чем прямоугольные волноводы.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ОТДЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ КНИГИ

Приложение 3.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВАРИАНТА ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В гл. 3 используется вариант формулировки условий единственности решения уравнений электромагнитного поля для случая периодических полей. Согласно этому варианту, вместо одной из тангенциальных составляющих поля E_τ или H_τ на части поверхности или на всей поверхности достаточно задать величину отношения

$$\frac{E_\tau}{H_\tau} = Z = R + iX = |Z|e^{i\varphi},$$

представляющего собой некоторое комплексное сопротивление, активная часть которого $R \geq 0$. Ниже даётся доказательство этого варианта теоремы единственности.

Доказательство теоремы единственности проводится, как обычно, от противного. Предполагаем вначале, что имеются два *различных* поля E_1 , H_1 и E_2 , H_2 , удовлетворяющих всем условиям задачи. Тогда можно рассмотреть разностное поле $E_0 = E_1 - E_2$, $H_0 = H_1 - H_2$, по предположению отличное от нуля. Это поле удовлетворяет *однородным* уравнениям электромагнитного поля, т. е. уравнениям, в которых сторонние источники равны нулю (поскольку источники для первого и второго поля по условию одинаковы). Применяя к разностному полю в объёме V теорему Умова — Пойнтинга, получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon E_0^2}{2} + \frac{\mu H_0^2}{2} \right) dV = \int_V \sigma_0 E_0^2 dV + \int_S [E_0 H_0] n dS,$$

где σ_0 — удельная проводимость среды, заполняющей объём V .

Если заданы касательные составляющие на части поверхности для одного из векторов E или H , то это в равной мере относится и к первому и ко второму полям. Поэтому для разностного поля на этой части поверхности будут справедливы граничные условия

$$[E_0 n] = [(E_1 - E_2) n] = 0 \quad \text{или} \quad [H_0 n] = [(H_1 - H_2) n] = 0.$$

и поверхностный интеграл для соответствующих участков поверхности обращается в нуль. Могут быть, вообще говоря, отличны от нуля лишь значения этого интеграла для участков поверхности S_0 , где задано отношение $E_\tau/H_\tau = Z$. Поэтому в поверхностном интеграле S заменяется на S_0 .

Ввиду того что рассматриваются лишь периодические решения, написанное выше соотношение для мощностей целесообразно далее усреднить за период T высокочастотных колебаний. Левая часть равенства при этом обращается в нуль, поскольку она определяется разностью значений периодической функции при значениях аргументов, отличающихся на период. Поэтому получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\int_V \epsilon_0 E_0^2 dV + \int_{S_0} |E_0 H_0| n dS \right) = 0.$$

Теперь воспользуемся выражениями для напряжённости поля в тригонометрической форме.

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{0m} \sin(\omega t + \psi), \\ H_0 &= H_{0m} \sin(\omega t + \theta), \end{aligned}$$

где амплитуды E_{0m} , H_{0m} и фазы ψ , θ являются функциями координат; при этом для тангенциальных составляющих поля на поверхности

$$\frac{E_{\tau 0m}}{H_{\tau 0m}} = |Z|, \quad \psi - \theta = \varphi.$$

Результат усреднения по времени можно тогда записать

$$\frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E_{0m}^2 dV + \frac{1}{2} \int_{S_0} H_{0m}^2 |Z| \cos \varphi dS = 0.$$

Отсюда видно, что при $R = |Z| \cos \varphi > 0$ или $\sigma > 0$ левая часть равенства больше нуля, если $E_{0m} \neq 0$ и $H_{0m} \neq 0$, в то время как правая часть равенства равна нулю. Это значит, что периодическое разностное поле не может существовать в объёме V , если имеются потери¹⁾.

Приложение 3.2

ВЫВОД ДВУХМЕРНЫХ ВАРИАНТОВ ФОРМУЛ ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА И ГРИНА

Формулу Остроградского — Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A}_n dS$$

¹⁾ В системе без потерь при отсутствии сторонних сил возможны незатухающие колебания с различными амплитудами. В идеальном колебательном контуре или объёмном резонаторе единственность, таким образом, не соблюдается. Последняя оговорка иногда опускается в литературе.

нетрудно преобразовать применительно к двумерному случаю, когда вектор $\mathbf{A}$ есть функция двух координат (x, y) . Применим для этого написанную формулу к цилиндру, построенному на кривой C в плоскости xy , так что образующие его будут параллельны оси z .

Интегралы $\int A_n dS$ по поверхности оснований цилиндра взаимно уничтожаются, поскольку векторные функции $\mathbf{A}$ одинаковы для обоих оснований, в то время как направления нормалей противоположны.

Принимая в качестве элементов объема и боковой поверхности цилиндра $dV = h dS$ и $dS_{бок} = h dl$, где h — высота цилиндра, dS — элемент площади основания и dl — элемент длины контура C , после сокращения на общий множитель h получим

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{A} dS = \oint_C A_n dl.$$

Это и есть двумерный вариант формулы Остроградского — Гаусса. По сравнению с предыдущей записью элемент объема заменён элементом площади dS , а элемент поверхности — элементом длины dl .

Чтобы перейти к двумерной формуле Грина подобно тому, как это делается в трёхмерном случае, положим

$$\mathbf{A} = \varphi(x, y) \operatorname{grad} \psi(x, y) = \varphi \operatorname{grad} \psi$$

и используем известное из векторного анализа соотношение

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{b}) = (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{b} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{b}.$$

Тогда получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \varphi \nabla^2 \psi.$$

Заменяя в двумерной формуле Остроградского — Гаусса дивергенцию вектора $\mathbf{A}$ её значением и учитывая, что

$$A_n = \varphi \operatorname{grad}_n \psi = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

находим двумерный вариант формулы Грина

$$\int_S (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dS = \varphi \oint_C \frac{\partial \psi}{\partial n} dl.$$

Приложение 8.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЛНОВОДА С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

Система собственных функций волновода с идеально проводящими стенками строится для волн E и H на основе решений двумерного мембранного уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

с нулевыми граничными условиями на замкнутом контуре ($\psi = 0$ или $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ на контуре C). Векторные собственные функции получаются из скалярных решений мембранного уравнения одним из следующих трёх способов: а) путём простого умножения на единичный вектор $\mathbf{z}^0$; б) путём нахождения градиента от скалярного решения; в) путём нахождения ротора от произведения скалярного решения на единичный вектор $\mathbf{z}^0$ (см. определение собственных функций в § 8.2 и выражения поперечных компонентов через продольные в § 3.4). Доказательство ортогональности системы собственных функций будет проведено на основе двухмерных вариантов формул Остроградского — Гаусса и Грина (см. приложение 3.2).

Используя последнюю формулу и заменяя для решения мембранного уравнения $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$, можно написать

$$\int_S \text{grad } \varphi \text{ grad } \psi \, dS - k^2 \int_S \varphi \psi \, dS = 0.$$

Здесь φ — пока ещё произвольная функция, в качестве которой возьмём также решение мембранного уравнения, но соответствующее собственному числу k_1 . Поскольку функции φ и ψ равноправны между собой, то, заменяя φ на ψ , k на k_1 и наоборот, получим

$$\int_S \text{grad } \varphi \text{ grad } \psi \, dS - k_1^2 \int_S \varphi \psi \, dS = 0.$$

Из сопоставления двух последних соотношений следует, что или $k = k_1$ или же

$$\int_S \varphi \psi \, dS = \int_S \text{grad } \varphi \text{ grad } \psi \, dS = 0.$$

Последнее означает, что *собственные функции, а также их градиенты, ортогональны между собой, если они соответствуют различным собственным числам.*

Теперь нетрудно доказать также и ортогональность роторов от произведений $\varphi \mathbf{z}^0$ и $\psi \mathbf{z}^0$. Используя дважды формулу для ротора от произведения скаляра на вектор, получим

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{z}^0) \text{rot}(\psi \mathbf{z}^0) = [\text{grad } \varphi \mathbf{z}^0] [\text{grad } \psi \mathbf{z}^0].$$

Обозначая второе из векторных произведений $\mathbf{b}$ по свойствам смешанного произведения, находим

$$[\text{grad } \varphi \mathbf{z}^0] \mathbf{b} = \text{grad } \varphi [\mathbf{z}^0 \mathbf{b}] = \text{grad } \varphi [\mathbf{z}^0 [\text{grad } \psi \mathbf{z}^0]].$$

Раскрывая двойное векторное произведение и учитывая ортогональность градиента функции поперечных координат x, y и продольного единичного вектора $\mathbf{z}^0$, получим

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{z}^0) \text{rot}(\psi \mathbf{z}^0) = \text{grad } \varphi \{ \text{grad } \varphi (\mathbf{z}^0 \mathbf{z}^0) - \mathbf{z}^0 (\mathbf{z}^0 \text{grad } \psi) \} = \text{grad } \varphi \text{ grad } \psi,$$

т. е. ортогональность роторов векторов $\varphi \mathbf{z}^0$ и $\psi \mathbf{z}^0$ определяется ортогональностью градиентов скалярных функций φ и ψ . Последняя уже доказана, значит, ортогональны и роторы векторных функций $\varphi \mathbf{z}^0$ и $\psi \mathbf{z}^0$.

Остаётся доказать ортогональность ротора векторной функции $\varphi \mathbf{z}^0$ и градиента скалярной функции ψ . Последнее представляет интерес для случая, когда одно решение принадлежит к классу E , а другое к классу H . В том, что и здесь ортогональность имеет место, можно убедиться, используя двухмерную формулу Остроградского—Гаусса. Заменяя в этой формуле $\mathbf{A} = [(\psi \mathbf{z}^0) \text{ grad } \varphi] = [\mathbf{a} \mathbf{b}]$, воспользуемся далее известными из векторного анализа соотношениями $\text{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}$ и $\text{rot grad } \varphi = 0$. Тогда получим

$$\text{div } \mathbf{A} = \text{grad } \varphi \text{ rot } (\varphi \mathbf{z}^0)$$

и, кроме того,

$$A_n = [(\psi \mathbf{z}^0) \text{ grad } \varphi]_n = \psi \mathbf{z}^0 [\text{grad } \varphi \mathbf{n}].$$

Поскольку по условию только одно из решений принадлежит к классу H , то либо функция ψ , либо функция φ обращается в нуль на контуре C . Отсюда следует, что обращается в нуль и A_n . При $\psi = 0$ это видно непосредственно. При $\varphi = 0$ это вытекает из того, что вектор $\text{grad } \varphi$ направлен на контуре нормально к линии равного уровня ($\varphi = 0$), т. е. перпендикулярно контуру, и, значит, векторное произведение $[\text{grad } \varphi \mathbf{n}] = 0$. Подставляя выражения для $\text{div } \mathbf{A}$ и A_n в двухмерную формулу Остроградского—Гаусса, находим

$$\int_S \text{grad } \varphi \text{ rot } (\psi \mathbf{z}^0) dS = 0,$$

что и доказывает ортогональность для рассматриваемого частного случая.

Из всего изложенного выше вытекает, что *любые две собственные функции для волн E и H при несовпадении собственных чисел (т. е. иначе при неравенстве критических частот) всегда ортогональны между собой*.

Полученные результаты распространяются на волны TEM , поскольку собственные функции для этих волн можно рассматривать как градиенты решений скалярного мембранного уравнения при $k=0$.

Приложение 9.1

РАСЧЁТ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЕМКОСТИ ДИАФРАГМЫ ПО МЕТОДУ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Метод конформных отображений используется для решения ряда электростатических и магнитостатических задач с плоско-параллельными полями.

Плоско-параллельными называют поля, потенциал которых остаётся неизменным вдоль какого-либо направления. В дальнейшем условимся считать это направление перпендикулярным плоскости чертежа.

Сущность метода конформных отображений проиллюстрируем на примере, имеющем прямое отношение к излагаемому далее расчёту. Воспользуемся известным решением задачи об электростатическом поле между двумя заряженными параллельными плоскостями. Такое поле представлено на рис. Пр. 9.1а, причём линии $x = \text{const}$ являются эквипотенциальными, а линии $y = \text{const}$ — векторными линиями электрического поля.

Введём в рассмотрение *регулярную* (имеющую непрерывную производную по комплексному аргументу) функцию $s(z)$. Значения этой функции для каждого z можно изображать при помощи точек на плоскости комплексного переменного $s = \xi + i\eta$. При этом точки $z = x + iy$ плоскости z будут *отображаться* в точки $s = \xi + i\eta$ плоскости s . Линии плоскости z будут переходить при этом в линии плоскости s , в общем случае меняя свою конфигурацию.

Поэтому говорят о *преобразовании* (или *отображении*) линий и точек при переходе с одной плоскости на другую.

Рассмотрим такое преобразование для линий, представленных на рис. Пр.9.1а, на примере функции

$$s(z) = \xi + i\eta = \sin z.$$

Заменяя $z = x + iy$ и вычисляя синус суммы, после разделения вещественной и мнимой частей можно получить

$$\xi = \sin x \operatorname{ch} y, \quad \eta = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Проанализируем вначале результаты преобразования для линий, ограничивающих *верхнюю полуполосу* — $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0$ (рис. Пр.9.1а).

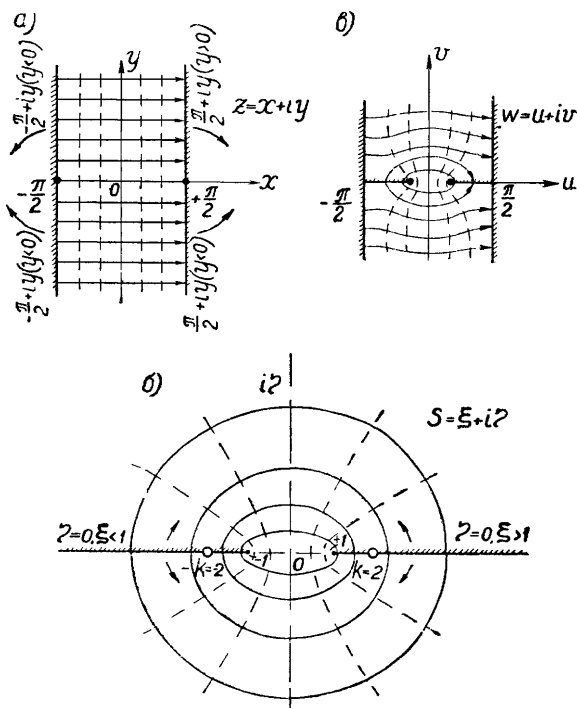


Рис. Пр. 9.1. Конформные преобразования электростатических полей

Начнём с *отрезка вещественной оси* — $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y = 0$. Подставляя $y = 0$ в формуле для ξ и η , найдём $\xi = \sin x, \eta = 0$, откуда видно, что при изменении x от $-\pi/2$ до $\pi/2$ значение ξ меняется от -1 до 1 , а η остаётся равным нулю. Рассматриваемый отрезок переходит, таким образом, в *отрезок вещественной оси* — $-1 \leq \xi \leq 1, \eta = 0$ на плоскости s .

Рассмотрим далее *полупрямую* $z = \pi/2 + iy (y \geq 0)$. Подставляя $x = \pi/2$, находим для неё $\xi = \operatorname{ch} y, \eta = 0$, откуда видно, что при изменении y от 0 до ∞ значение ξ меняется от 1 до ∞ , а η по-прежнему остаётся равным нулю.

Рассматриваемая полупрямая переходит, таким образом, в *полупрямую* $\xi \geq 1$, $\eta = 0$ на плоскости s .

Подобным же образом можно убедиться, что полупрямая $z = -\pi/2 + i\eta$ переходит в полупрямую $\xi \leq -1$, $\eta = 0$ на плоскости s (при этом $\xi = \operatorname{ch} u$, $\eta = 0$).

В результате *верхняя полуполоса* $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0$ *растягивается на всю верхнюю полуплоскость* $\eta \geq 0$ (рис. Пр. 9.1б), что схематически показывается в виде стрелок, характеризующих растяжение полуполосы (рис. Пр. 9.1а). Только вблизи точек $s = \pm 1$ имеет место не растяжение, а сжатие. В свою очередь, *нижняя полуполоса* $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y \leq 0$ *растягивается на всю полуплоскость* $\eta \leq 0$. Линии электрического поля переходят при этом в эллипсы, а эквипотенциальные линии в гиперболы¹⁾. Оказывается, что семейства эллипсов и гипербол ортогональны между собой и любой бесконечно малый прямоугольник на плоскости z преобразуется в подобный ему бесконечно малый прямоугольник на плоскости s . Это даёт основание называть преобразование *конформным* (т. е. не изменяющим формы бесконечно малых фигур).

Исходным для преобразования в рассмотренном случае было поле в диэлектрике *без распределённых зарядов*, потенциал которого удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа. Оказывается, что в подобных случаях *результат преобразования можно рассматривать так же, как картину электрического поля в диэлектрике без распределённых зарядов*. Последнее утверждение основывается на том, что потенциалы преобразованного поля, как в этом можно убедиться, удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа. В частности, результат преобразования (рис. Пр. 9.1б) характеризует *поле двух заряженных до противоположных потенциалов полуплоскостей, разделённых щелью*.

Очевидно, что обратное преобразование $z = \operatorname{arcsin} s$ с плоскости z на плоскость s должно вернуть нас к исходной картине поля (рис. Пр. 9.1а).

Естественно, что оно носит противоположный характер и сводится к сжатию верхней и нижней полуплоскостей в верхнюю и нижнюю полуполосы с *разрезом* участков вещественной оси $\xi \geq 1$ и $\xi \leq -1$ и *поворотом* их относительно точек $s = \xi = \pm 1$.

Подобный же характер должно носить и преобразование $w = \operatorname{arcsin} \frac{s}{\kappa}$ (κ — вещественное число, большее единицы). Оно отличается только тем, что вещественная ось разрезается на участках $\xi \geq \kappa$ и $\xi \leq -\kappa$ и поворот участков этой оси происходит вокруг точек $s = \xi = \pm \kappa$. Сетка кривых, нанесённых на плоскости $s = \xi + i\eta$ (рис. Пр. 9.1б) преобразуется тогда в сетку кривых на плоскости $w = u + iv$ (рис. Пр. 9.1в).

Проследим за отображением заштрихованных эквипотенциальных линий. Их новая конфигурация соответствует конфигурации проводящих элементов для системы плоскостей с диафрагмой. Совокупность двух рассмотренных преобразований *отображает таким образом поле между плоскостями без диафрагмы в поле с симметричной диафрагмой*.

Диафрагма может быть охарактеризована *относительной шириной отверстия* χ , т. е. отношением ширины отверстия к расстоянию между плоскостями. Относительная ширина отверстия связана с параметром преобразования κ . В самом деле, края диафрагмы получаются путём преобразования точек $s = \pm 1$ в точки $w = \pm \operatorname{arcsin} \frac{1}{\kappa}$. Получаемая при этом относительная ширина отверстия составляет

$$\chi = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsin} \frac{1}{\kappa}$$

¹⁾ Уравнения эллипсов и гипербол, вытекающие из выражений для ξ и η , имеют вид

$$\frac{\xi^2}{\operatorname{ch}^2 y} + \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 y} = 1, \quad \frac{\xi^2}{\sin^2 x} - \frac{\eta^2}{\cos^2 x} = 1.$$

Отсюда, в свою очередь, можно определить параметр

$$\kappa = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} \chi} = \csc \frac{\pi}{2} \chi.$$

Объединяя оба описанных выше преобразования, заключаем, что переход от сетки кривых (рис. Пр. 9.1а) к сетке кривых (рис. Пр. 9.1в) сводится к преобразованию комплексной плоскости вида

$$w = \arcsin \left(\frac{1}{\kappa} \sin z \right),$$

где $\kappa = \csc \frac{\pi}{2} \chi$. Одной из особенностей этого преобразования является сжатие векторных линий у диафрагмы, соответствующее концентрации электрического поля. Поэтому координата v отображённой линии электрического поля всегда будет меньше координаты y исходной линии. Определяя разность значений y и v для соответствующих друг другу линий поля вдали от диафрагмы, можно оценить её ёмкость. *Удвоенное значение разности $2(y-v) = 2\Delta l$, в частности, показывает, насколько должны отличаться длины конденсаторов без диафрагмы (рис. Пр. 9.1а) и с диафрагмой (рис. Пр. 9.1в), для того чтобы их ёмкости были одинаковы.* В самом деле при одинаковом числе силовых линий на изображениях поля, несмотря на различие в размерах, конденсаторы (рис. Пр. 9.1а и Пр. 9.1в) характеризуются одинаковым суммарным зарядом при одинаковой разности потенциалов и, значит, имеют одинаковую ёмкость. Краевой эффект при этом можно не учитывать, так как при больших y и v он сказывается в обоих случаях одинаковым образом.

Чтобы определить разность координат y и v для соответствующих друг другу линий поля, заметим, что, поскольку при больших значениях y соблюдается неравенство $e^y \gg e^{-y}$, то

$$\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \approx - \frac{e^{-ix}}{2i} \frac{e^y}{e^{iy}}.$$

Подобно этому, при больших значениях v

$$\sin w \approx - \frac{e^{-iu}}{2i} \frac{e^v}{e^{iv}}.$$

Тогда отношение этих синусов можно представить в виде

$$\frac{\sin z}{\sin w} \approx e^{-i(x-u)} e^{y-v}.$$

Согласно же закону преобразования, это отношение должно быть равно положительному числу κ . Последнее выполняется, если при больших y и v

$$x \approx u, \quad y - v = \ln \kappa.$$

Таким образом, конденсаторы одинаковой ёмкости без диафрагмы и с диафрагмой отличаются по длине на

$$2\Delta l = 2(y - v) = 2 \ln \kappa = 2 \ln \csc \frac{\pi}{2} \chi.$$

Иначе говоря, ёмкость диафрагмы может быть заменена ёмкостью плоского конденсатора протяжённостью $2\Delta l$. Замена справедлива при одинаковой длине диафрагмы и конденсатора в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, и расстоянии π между пластинами конденсатора.

Если все геометрические размеры изменить в b/π раз так, чтобы расстояние между плоскостями стало равным b , — пропорционально изменится и величина $2\Delta l$, принимая значение

$$2\Delta l = \frac{b}{\pi} 2 \ln \kappa = \frac{2b}{\pi} \ln \csc \frac{\pi}{2} \chi.$$

Величина $2\Delta l$ показывает, какую длину должен иметь плоский конденсатор, чтобы его ёмкость была равна ёмкости диафрагмы при произвольном расстоянии между плоскостями b .

Ёмкость этого конденсатора (на единицу длины перпендикулярно плоскости чертежа)

$$C_{\text{ног}} = \epsilon \frac{2\Delta l}{b} = \frac{2\epsilon}{\pi} \ln \csc \frac{\pi}{2} \chi.$$

Приложение 9.2

РАСЧЁТ ПРОВОДИМОСТИ ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛУВОЛНОВОЙ ЩЕЛИ В БЕСКОНЕЧНОМ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЭКРАНЕ И ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Задача об излучении полуволновой щели в бесконечном идеально проводящем экране имеет много общего с задачей излучения ленточного полуволнового вибратора (рис. Пр. 9.2), если в обоих случаях рассматривается полупространство по одну сторону от плоскости экрана или ленточного вибратора

Решение каждой из этих задач является *единственным*, если заданы *граничные условия* для одной из составляющих поля на всей плоскости экрана или вибратора, а вместо граничных условий на полусфере бесконечно большого радиуса используется так называемый принцип излучения. Сущность последнего сводится к тому, что на больших расстояниях от источника поле представляет собой расходящуюся бегущую волну¹⁾.

Граничные условия соответственно в плоскости вибратора и щели могут быть записаны в виде:

а) плоскость вибратора

$$H_z = \begin{cases} H_{om} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - z_0) e^{i\omega t} & \text{— на вибраторе,} \\ 0 & \text{— вне вибратора;} \end{cases}$$

б) плоскость щели

$$E_z = \begin{cases} E_{om} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - z_0) e^{i\omega t} & \text{— на щели,} \\ 0 & \text{— вне щели.} \end{cases}$$

¹⁾ См., например, Стреттон. Теория электромагнетизма, ГТИ, 1948, стр. 430.

Легко видеть, что имеет место *двойственность* граничных условий, т. е. граничные условия одной задачи переходят в граничные условия другой задачи, если H заменяется на E , а E на H .

Пусть решение для магнитного поля вибратора известно:

$$H = H_{0m} f(r, \theta, \varphi) e^{i\omega t}.$$

Здесь r, θ, φ — соответствующие сферические координаты, а $f(r, \theta, \varphi)$ — известная безразмерная векторная функция. Тогда решение для электрического поля щели можно записать в виде

$$E = E_{0m} f(r, \theta, \varphi) e^{i\omega t},$$

где $f(r, \theta, \varphi)$ — та же векторная функция, что и в предыдущем случае.

Поскольку волновые уравнения для E и H имеют одинаковый вид, написанное решение для вектора E непременно удовлетворяет соответствующему волновому уравнению, а значит, и уравнениям поля. В силу двойствен-

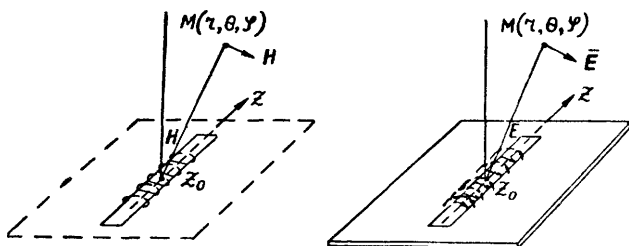


Рис. Пр. 9.2. К расчёту проводимости внешнего излучения щели

ности граничных условий для щели и для вибратора оно удовлетворяет и соответствующим граничным условиям. Следовательно, полученное решение для вектора E является *искомым единственным* решением задачи. Приведённое рассуждение является частным случаем применения *принципа двойственности* А. А. Пистолькорса, который состоит в том, что при замене E на H , H на E , μ на ϵ и ϵ на $-\mu$ решение уравнений электромагнитного поля для некоторой области переходит в другое решение для той же области, а именно в то, для которого граничные условия меняются на двойственные¹⁾.

Выражения для магнитного поля вибратора и электрического поля щели свидетельствуют об одинаковых характеристиках направленности обоих излучателей при одновременном изменении плоскости поляризации (H заменяется на E , E на H). Они позволяют легко сравнить мощности излучения в полупространстве щели и вибратора. Эти мощности определяются путём интегрирования плотности потока энергии по полусфере радиуса $R \gg \lambda$, на которой E и H можно считать синфазным. Выражения для мощностей излучения в полупространство для щели и для вибратора имеют вид:

$$P_{\Sigma \text{ в полупр}} = \int_S \frac{E_m^2}{2\rho_0} ds = \frac{E_{0m}^2}{2\rho_0} \int_S |f(r, \theta, \varphi)|^2 dS,$$

$$P_{\Sigma \text{ в полупр}} = \int_S \frac{H_m^2}{2} \rho_0 dS = \frac{H_{0m}^2}{2} \rho_0 \int_S |f(r, \theta, \varphi)|^2 dS.$$

¹⁾ Задачу излучения из щели можно рассматривать так же, как задачу излучения ленты «магнитного тока» $[nE]$, расположенной на идеально проводящей плоскости (уже без щели).

Отсюда видно, что

$$\frac{P_{\Sigma \text{ щ полупр}}}{P_{\Sigma \text{ в полупр}}} = \frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{E_{0m}}{H_{0m}} \right)^2.$$

Ввиду того что решение задачи о вибраторе можно считать известным (предполагаем, что в дальней зоне ленточный вибратор излучает так же, как и цилиндрический), можно написать, что мощность излучения вибратора равная удвоенной мощности излучения в полупространство, будет

$$P_{\Sigma \text{ в}} = 2P_{\Sigma \text{ в полупр}} = \frac{1}{2} I_{0m}^2 R_{\Sigma},$$

где I_{0m} — амплитуда тока в пучности тока вибратора, а $R_{\Sigma} = 73,1 \text{ ом}$ — его сопротивление излучения. Используя закон полного тока для контура, окружающего вибратор, кроме того, имеем $I_{0m} = 2H_{0m}d$, где d — ширина вибратора, H_{0m} — амплитуда напряжённости магнитного поля в пучности тока вибратора. Отсюда находим выражение для мощности излучения вибратора в полупространство

$$P_{\Sigma \text{ в полупр}} = \frac{1}{2} P_{\Sigma \text{ в}} = H_{0m}^2 d^2 R_{\Sigma}.$$

Теперь можно найти выражения и для мощности излучения щели

$$P_{\Sigma \text{ щ полупр}} = \frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{E_{0m}}{H_{0m}} \right)^2 P_{\Sigma \text{ в полупр}} = E_{0m}^2 d^2 \frac{R_{\Sigma}}{\rho_0^2}.$$

Вводя амплитуду напряжения на щели в пучности напряжения $U_{0m} = E_{0m}d$, находим окончательное выражение для мощности излучения щели в виде

$$P_{\Sigma \text{ щ полупр}} = U_{0m}^2 \frac{R_{\Sigma}}{\rho_0^2} = P_{\Sigma}.$$

Коэффициент, связывающий удвоенную излучаемую мощность с квадратом амплитуды напряжения на щели, имеет размерность проводимости и носит название *проводимости внешнего излучения щели*

$$G_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{U_{0m}^2}.$$

Проводимость внешнего излучения полуволновой щели в бесконечном идеальном проводящем экране, таким образом, равна

$$G_{\Sigma} = \frac{2R_{\Sigma}}{\rho_0^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Введенский Б. А. и Аренберг А. Г. Радиоволноводы, ч. I. Гостехиздат, 1946.
2. Слэтер. Дж. Передача ультракоротких радиоволн. Гостехиздат, 1946.
3. Сарбахер Р. и Эдсон В. Техника сверхвысоких частот. Связьиздат, 1947.
4. Фельд Я. Н. Основы теории щелевых антенн. «Советское радио», 1948.
5. Рамо С. и Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике. Гостехиздат, 1948.
6. Страттон Д. А. Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
7. Бройли Л. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. Изд. ИЛ, 1948.
8. Кисунько Г. В. Электродинамика полых систем. Изд. ВКАС, 1949.
9. Вольман И. И. Техника микроволн. «Советское радио», 1948.
10. Техника измерений на сантиметровых волнах, т. I и II. Перевод с английского, под редакцией Г. А. Ремеза. «Советское радио», 1949.
11. Нейман М. С. Триодные и тетродные генераторы сверхвысоких частот. «Советское радио», 1950.
12. Антенны сантиметровых волн. Перевод с английского, под редакцией Я. Н. Фельда. «Советское радио», 1950.
13. Линии передачи сантиметровых волн, ч. I и II. Перевод под редакцией Г. А. Ремеза. «Советское радио», 1951.
14. Теория линий передачи сверхвысоких частот, ч. I и II. Перевод с английского, под редакцией А. И. Шпунтова. «Советское радио», 1951.
15. Валитов Р. А. и Сretenский В. Н. Радиоизмерения на сверхвысоких частотах. Воениздат, 1951.
16. Аршинов С. С., Персон С. В., Эйленкриг А. И. Инженерный расчёт контуров генераторов УКВ и КВ (отрезки длинных линий и объёмные резонаторы). «Советское радио», 1951.
17. Гуревич А. Г. Полые резонаторы и волноводы. «Советское радио, 1952.
18. Справочник по волноводам. Перевод с английского, под редакцией Я. Н. Фельда. «Советское радио», 1952.
19. Лампы с бегущей волной. Перевод с английского под редакцией В. Т. Овчарова. «Советское радио», 1952.
20. Техника сверхвысоких частот, ч. I. Перевод под редакцией Я. Н. Фельда. «Советское радио», 1952; ч. II. Перевод под редакцией Т. Р. Брахмана, 1953.
21. Лопухин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. Гостехиздат, 1953.
22. Смайт В. Электростатика и электродинамика. Изд. ИЛ, 1954.
23. Левин Л. Современная теория волноводов. Изд. ИЛ, 1954.
24. Штейншлейгер В. Б. Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. Оборонгиз, 1955.
25. Нейман М. С. Обобщение теории цепей на волновые системы. Госэнергоиздат, 1955.

26. Саусворт Дж. К. Принципы и применения волноводной передачи. «Советское радио», 1955.
 27. Сул Г. и Уоркер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. Изд. ИЛ, 1955.
 28. Фокс А. Д., Миллер С. Е. и Вейс М. Т. Свойства ферритов и их применение в диапазоне СВЧ. «Советское радио», 1956.
 29. Пл од у х и н Б. В. Коаксиальные диапазонные резонаторы. «Советское радио», 1956.
 30. Г о л ь д ш т е й н Л. Д. и З е р н о в Н. В. Электромагнитные поля и волны. «Советское радио», 1956.
 31. В а й н ш т е й н Л. А. Электромагнитные волны. «Советское радио», 1957.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие :	3
Глава 1	
Введение	
§ 1.1. Области применения диапазона сверхвысоких частот и его особенности	5
§ 1.2. Особенности колебательных систем на свч	8
§ 1.3. Особенности использования двухпроводных и коаксиальных фидерных линий на свч	11
§ 1.4. Пояснение принципа действия волновода в виде полой металлической трубы. Сравнение с коаксиальным кабелем	15
§ 1.5. Примеры волноводных конструкций	20
§ 1.6. Особенности изучения теории волноводов и объёмных резонаторов	21
Глава 2	
Электромагнитные волны между параллельными плоскостями	
§ 2.1. Постановка задачи и основные определения	23
§ 2.2. Уравнения для составляющих поля одномерной задачи	25
§ 2.3. Граничные условия	28
§ 2.4. Три класса частных решений	30
§ 2.5. Волна <i>ТЕМ</i> между параллельными плоскостями	31
§ 2.6. Волны типа <i>H</i> между параллельными плоскостями. Виды волн	
Распределение составляющих поля в поперечной плоскости	35
§ 2.7. Распределение составляющих поля волн типа <i>H</i> вдоль направления распространения. Критическая частота и критическая длина волны	38
§ 2.8. Длина волны, волновое сопротивление и выражения для составляющих поля волн типа <i>H</i> между параллельными плоскостями при $\omega > \omega_{кр}$	44
§ 2.9. Структура поля волн типа <i>H</i> при $\omega > \omega_{кр}$	46
§ 2.10. Фазовая скорость и скорость переноса энергии волн типа <i>H</i>	54
§ 2.11. Разложение неоднородной волны типа <i>H</i> на однородные плоские волны	58
§ 2.12. Волны типа <i>E</i> между параллельными плоскостями	64
§ 2.13. Пример расчёта поля по заданному току возбудителя	67
§ 2.14. Распространение негармонических колебаний и нестационарные процессы в пространстве между плоскостями	75
§ 2.15. Волны между неидеально проводящими параллельными плоскостями	81
	375

Глава 3

Элементы общей теории волноводов произвольной формы сечения

§ 3.1. Постановка задачи	89
§ 3.2. Метод частных решений и теорема единственности решений уравнений электромагнитного поля	91
§ 3.3. Отыскание системы частных решений. Мембранные уравнения	92
§ 3.4. Поперечные и продольные компоненты поля. Выражение поперечных компонентов через продольные	96
§ 3.5. Граничные условия для продольных составляющих поля	101
§ 3.6. Общие свойства поперечных электромагнитных волн (<i>TEM</i>)	103
§ 3.7. Поперечно-электрические (<i>H</i>) и поперечно-магнитные (<i>E</i>) волны	107
§ 3.8. О вещественном характере собственных чисел мембранного уравнения при нулевых граничных условиях	109
§ 3.9. Постоянная распространения, волновое сопротивление и скорости распространения для волн <i>H</i> и <i>E</i> в волноводах произвольной формы сечения	110

Глава 4

Прямоугольные волноводы

§ 4.1. Общие соображения	112
§ 4.2. Определение частных решений мембранного уравнения в прямоугольной системе координат	112
§ 4.3. Выражения для составляющих поля волн <i>E</i> и <i>H</i>	116
§ 4.4. Волна <i>H</i> ₀₁ в прямоугольном волноводе. Расчётные соотношения	121
§ 4.5. Структура поля волн <i>H</i> высших типов. Элементы связи и объёмные фильтры	129
§ 4.6. Структура поля волн <i>E</i>	133
§ 4.7. Расчёт критических длин волн. Диаграмма типов волн. Преимущества работы на волне основного типа	136
§ 4.8. Режим работы волновода на волне основного типа	141
§ 4.9. Расчёт мощностей, переносимых волнами основного и высших типов. Предельная и допустимая мощности	144
§ 4.10. Учёт потерь в стенках волновода	150
§ 4.11. Коэффициенты затухания для волн основного и высших типов	154
§ 4.12. Выбор размеров волновода	158
§ 4.13. Примеры конструкций волноводных секций	160
§ 4.14. Волновые сопротивления по напряжению и току, мощности и току, напряжению и мощности	164
§ 4.15. Поляризационные явления в прямоугольных волноводах	166
§ 4.16. Поля в прямоугольном волноводе при частоте ниже критической	168

Глава 5

Круглые волноводы

§ 5.1. Общие сведения	170
§ 5.2. Нахождение частных решений мембранного уравнения в полярной системе координат	170
§ 5.3. Выражения для составляющих поля и критические длины волн типа <i>E</i> в круглом волноводе	175

§ 5.4. Структура поля волн типа E . Использование волны E_{01} во вращающихся сочленениях	179
§ 5.5. Выражения для составляющих поля и критические длины волн типа H в круглом волноводе	182
§ 5.6. Структура поля волн типа H . Фильтрация и преобразование волн в круглом волноводе	185
§ 5.7. Поляризационные явления и устойчивость поля при передаче волны H_{11} в круглом волноводе	189
§ 5.8. Передаваемая мощность и потери в круглом волноводе. Выбор размеров волновода	194
§ 5.9. Поля в круглом волноводе при частоте ниже критической	200

Глава 6

Электромагнитные волны в коаксиальном кабеле

§ 6.1. Общие соображения	202
§ 6.2. Волна TEM в коаксиальном кабеле	203
§ 6.3. Волны E в коаксиальном кабеле	207
§ 6.4. Волны H в коаксиальном кабеле	210
§ 6.5. Диаграмма видов колебаний коаксиального кабеля	213
§ 6.6. Предельная и допустимая мощности коаксиального кабеля	215
§ 6.7. Постоянная затухания для волны основного типа в коаксиальном кабеле	216
§ 6.8. Выбор размеров коаксиального кабеля. Примеры типовых конструкций	217

Глава 7

Объемные резонаторы

§ 7.1. Общие соображения	222
§ 7.2. Обобщенная запись для режима бегущей волны и смешанного режима в волноводе	222
§ 7.3. Режим стоячей волны в волноводе. Резонансные отрезки волновода как объемные резонаторы	227
§ 7.4. Энергетические соотношения в волноводном резонаторе без потерь	230
§ 7.5. Прямоугольный резонатор	232
§ 7.6. Круглый резонатор	240
§ 7.7. Коаксиальный резонатор	242
§ 7.8. Добротность объемного резонатора. Основные соотношения	243
§ 7.9. Добротность как характеристика режимов свободных и вынужденных колебаний в резонаторе с потерями	247
§ 7.10. Связь добротности волноводного резонатора с коэффициентом затухания в волноводе	249
§ 7.11. Неволноводные резонаторы	250

Глава 8

Основы теории возбуждения волноводов и резонаторов

§ 8.1. Постановка задачи о возбуждении волновода заданными сторонними токами и полями в щелях	253
§ 8.2. Запись решений для волновода с источниками	256
§ 8.3. Ортогональность собственных функций и формула переносимой мощности. Нормировка	259
§ 8.4. Лемма Лоренца	263
	377

§ 8.5. Дифференциальные уравнения распределения поля вдоль волновода с источниками	265
§ 8.6. Аналогия с линиями	269
§ 8.7. Бесконечная линия с распределёнными источниками. Понятие об эквивалентных источниках	272
§ 8.8. Бесконечный и конечный волноводы с распределёнными источниками	274
§ 8.9. Расчёт эквивалентных источников для некоторых частных случаев возбуждения волноводов	275
§ 8.10. Примеры расчёта поля по заданным источникам	281
§ 8.11. Входное сопротивление возбуждающего штыря в прямоугольном волноводе при волне типа H_{01}	285
§ 8.12. Особенности регулировки возбуждающего устройства при волне H_{01}	292
§ 8.13. Входные проводимости резонансных щелей в волноводе	293
§ 8.14. Расчёт входного сопротивления элемента связи со слабонагруженным резонатором	295
§ 8.15. Расчёт продольных составляющих поля в волноводе с источниками	297
§ 8.16. Использование дифференциальных уравнений волновода с источниками при учёте потерь	299

Глава 9

Элементы теории неоднородностей в волноводах . Схемы замещения

§ 9.1. Общие сведения о неоднородностях	300
§ 9.2. Эквивалентные пассивные четырёхполюсники и методы экспериментального определения их параметров	302
§ 9.3. Эквивалентные пассивные многополюсники и методы экспериментального определения их параметров	309
§ 9.4. Диафрагмы в волноводе	311
§ 9.5. Приёмный штырь в волноводе	319
§ 9.6. Реактивный штырь в волноводе	321
§ 9.7. Излучающие резонансные щели как волноводные нагрузки	322
§ 9.8. Волноводные тройники	324
§ 9.9. Двойной тройник	326
§ 9.10. Волноводно-щелевой мост	331

Глава 10

Замедляющие системы

§ 10.1. Общие сведения	333
§ 10.2. Плоский диэлектрический волновод как простейшая замедляющая система	333
§ 10.3. Замедляющая система типа гребёнки	336
§ 10.4. Спиральная замедляющая система	339
§ 10.5. Дифференциальное уравнение возбуждения замедляющей системы электронным потоком (случай больших замедлений)	342

Глава 11

Некоторые вопросы распространения электромагнитных волн в анизотропных волноводных системах

§ 11.1. Общие замечания	343
§ 11.2. Электронные волны в однородном электронном потоке	343
§ 11.3. Замедляющая система с осевым электронным потоком	346

§ 11.4. Однородная волна в намагниченном феррите	348
§ 11.5. Об использовании ферритов в волноводной технике	355

Глава 12

Краткие сведения о ленточных (полосковых) и ребристых волноводах

§ 12.3. Ребристые (Н-образные и П-образные волноводы)	359
§ 12.2. Ленточные линии (полосковые волноводы)	359
§ 12.1. Общие замечания	360

Приложения к отдельным главам книги

Приложение 3.1. Доказательство варианта теоремы единственности решения уравнений электромагнитного поля	362
Приложение 3.2. Вывод двумерных вариантов формул Остроградского — Гаусса и Грина	363
Приложение 8.1. Доказательство ортогональности системы собственных функций волновода с идеально проводящими стенками	364
Приложение 9.1. Расчёт эквивалентной ёмкости диаграммы по методу конформных отображений	366
Приложение 9.2. Расчёт проводимости внешнего излучения полуволновой щели в бесконечном идеально проводящем экране и принцип двойственности	370
Л и т е р а т у р а	373

Яков Давидович Ширман

РАДИОВОЛНОВОДЫ И ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Отв. редактор *М. В. Персиков*
Редактор *Е. С. Новикова*

Техн. редактор *С. Ф. Карабилова*
Корректор *Н. С. Корнеева*

Сдано в набор 20/X 1958 г.

Форм. бум. 60 × 92/₁₆

Т-01040 Тираж 10 000 экз

Подписано в печ. 23/1 1959 г.

23,75 печ. л.

Зак. изд. 7550

21,9 уч.-изд. л.

Цена 12 р. 50 коп.

Связьиздат, Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2.

Типография Связьиздата, Москва-центр, ул. Кирова 40. Зак. тип. 585

ОПЕЧАТКИ,

замеченные в книге Я. Д. Ширмана «Радиоволноводы и объёмные резонаторы»

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
испр. 107	4 стр.	$\dots E_S = \rho H_S,$	$\dots E_S = \rho_H H_S,$
испр. 165	11 стр.	$\dots = d_{j_{Sz}} = \dots$	$\dots = b_{j_{Sz}} = \dots$
испр. 177	1 стр.	$\dots = -\frac{\gamma}{2} \text{grad}_S E_z.$	$\dots = -\frac{\gamma}{k^2} \text{grad}_S E_z.$
испр. 247	6 стр.	$\dots \Delta t, \dots$	$\dots dt \dots$
испр. 280	16 «	$\dots = -[\nabla_S F] = \dots$	$\dots = [\nabla_S F] = \dots$
испр. 283	14 стр.	$\dots = j \gamma \rho e^{-\lambda z},$	$\dots = j_p \rho e^{-\lambda z},$
испр. 298	13 стр.	$\dots = \omega^2 \epsilon \mu - a_0^2,$	$\dots = \omega^2 \epsilon \mu = a_0^2,$
испр. 299	14 «	$\dots = Z_S [nE] \dots$	$\dots = Z_S [nH] \dots$
испр. 299	18 «	$\dots = -\dot{h} (Z_0 - \epsilon_0 \int \dots)$	$\dots = -\dot{h} (Z_0 - \epsilon_0 \rho^2 \int \dots)$
испр. 316	5 стр.	$\dots [\dots],$	$\dots [\dots]^2,$
испр. 317	ф-ла (9.27)	$\dots \cos^2 \frac{m\pi}{2} \chi.$	$\dots \cos^2 \frac{m}{2} \pi.$
317	2 стр.	$\dots = \sin \frac{\pi x}{a} \left[\sin^2 \frac{\pi c}{2a} - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right]$	$\dots = - \left[\arcsin \left(\csc \frac{\pi c}{2a} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin \frac{\pi x}{a} \right) \right]$
испр. 345	4 «	$\dots e^{\left(i\omega t - \frac{z-z_0}{v_0} \right)}.$	$\dots e^{i\omega \left(t - \frac{z-z_0}{v_0} \right)}.$
испр. 347	7 «	$\dots = a^3 e^{i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \nu \right)},$	$\dots = a^3 e^{-i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \nu \right)},$
испр. 347	3 «	$\dots = C a e^{\frac{i 3\pi}{2}} = -i C a^1)$	$\dots = C a e^{-\frac{i 3\pi}{2}} = i C a^1)$
352	5 стр.	$\omega = \omega z^0 \dots$	$\omega = \omega z^0 \dots$
352	3 стр.	$\dots = [\omega m].$	$\dots = [\omega m].$
испр. 355	ф-ла (11.33)	$\mu_0 = \dots $	$\mu_0 \dots $